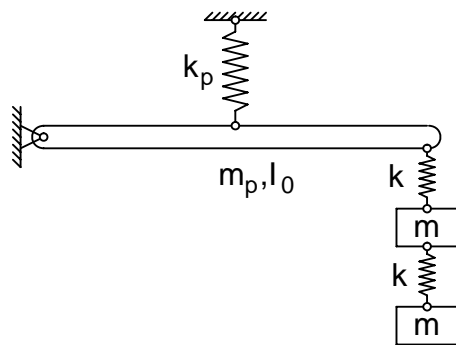
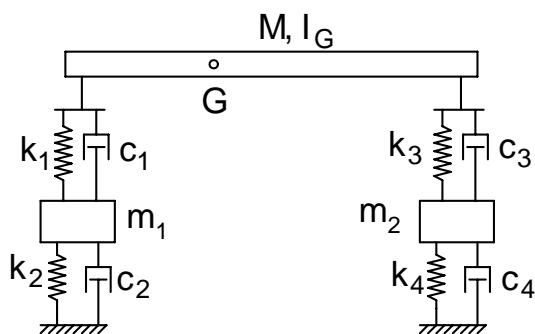


1 JOHDANTO



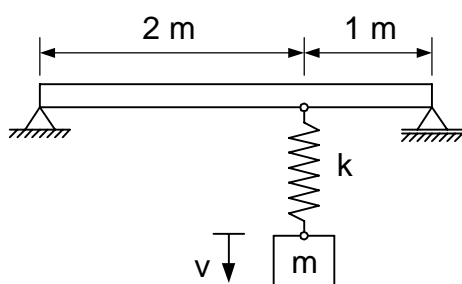
1.1 Selvitä kuvan systeemin vapausasteiden lukumäärä ja esitä sen tarkasteluun sopivat koordinaatit. Palkki on jäykkä ja sen massa on m_p ja hitausmomentti massakeskiön suhteen I_0 . Massat m ovat pistemäisiä ja jouset massattomia (jousivakiot ovat k_p ja k). Liike tapahtuu kuvan tasossa ja pistemassat voivat liikkua vain pystysuunnassa.

1.2 Kuvassa on esitetty ajoneuvon laskentamalli. Ajoneuvon massa ilman pyöriä ja akseleita on M ja sitä mallinnetaan jäykällä palkilla, jonka hitausmomentti massakeskiön G suhteen on I_G . Pyöräparin ja akselin massat ovat etupäässä m_1 ja takapä-

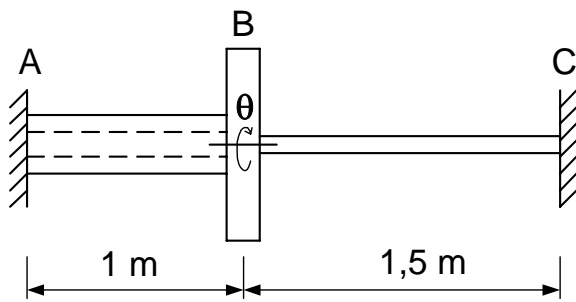


sä m_2 . Etujousituksen jousivakio on k_1 ja eturengasparin jousivakio k_2 sekä etuiskunvaimentimien vaimennusvakio c_1 ja eturengasparin vaimennusvakio c_2 . Vastaavat suureet takapäässä ovat k_3 , k_4 , c_3 ja c_4 . Selvitä systeemin vapausasteiden lukumäärä ja esitä sen tarkasteluun sopivat koordinaatit. Liike tapahtuu kuvan tasossa ja massat voivat liikkua vain pystysuunnassa.

2 VÄRÄHTELEVÄN SYSTEEMIN OSAT



2.1 Kaksitukiseen palkkiin on ripustettu jousella pistemassa m . Systeemiä tarkastellaan yhden vapausasteen laskentamallilla ja koordinaatiksi valitaan pistemassan pystysiirtymä v . Palkin materiaalin kimmomoduuli on $E = 210 \text{ GPa}$, poikkileikkauksen neliömomentti taivutusakselin suhteen on $I = 4,2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$ ja jousivakio $k = 120 \text{ MN/m}$. Määritä systeemin ekvivalentti jousivakio.

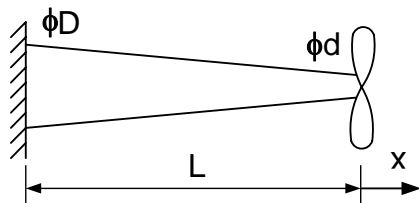


2.2 Jäykkä kiekko B on tuettu kahdella vääntöjousisauvalla AB ja BC kuvan mukaisesti. Systemiä tarkastellaan yhden vapausasteen laskentamallilla valiten koordinaatiksi kiekon kiertymä θ . Sauvassa AB on teräsydin, jonka halkaisija on 30 mm ja alumiinikuori, jonka ulkohalkaisija on 60 mm. Sauva BC on terästä ja sen poikkileikkausympyrän halkaisija on 20 mm.

Teräksen liukumoduuli on 80 GPa ja alumiinin 28 GPa. Määritä systeemin ekvivalentti vääntöjousivakio.

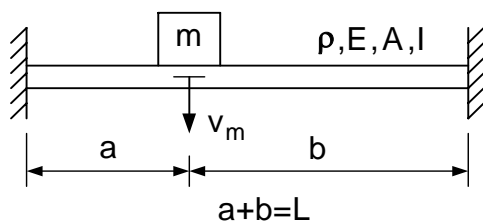
2.3. Koneelle tehdään värinäeristys kiinnittämällä se neljästä kohdasta alustaansa kumijousilla (rinnankytkentä). Riittävän eristyksen saavuttamiseksi vaaditaan, että tuennan jousivakio ei ylitä arvoa 360 kN/m. Käytettävissä on vain jousia, joiden jousivakio on 400 kN/m. Näitä jousia voidaan kuitenkin rajoituksetta kytkeä sarjaan. Määritä pienin mahdollinen jousien määrä, jolla päästään haluttuun eristykseen.

2.4 Laivan potkurin akseli on katkaistun kartion muotoinen ja sen pituus $L = 10$ m sekä halkaisijat ovat $d = 400$ mm ja $D = 600$ mm. Akselin materiaali on teräs, jonka

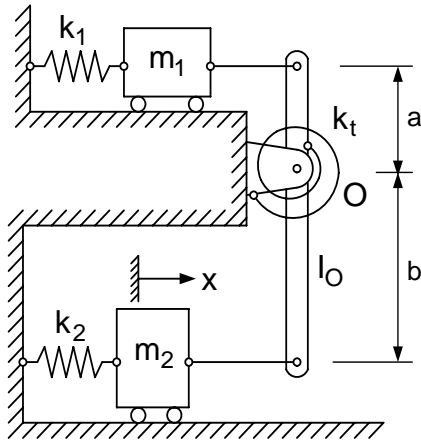


$E = 210$ GPa ja $\rho = 7850$ kg/m³. Potkurin massa on 500 kg. Akselin toinen pää on laivan suhteen kiinteä ja toinen pää vapaa. Systemin pitkittäisvärähtelyä tutkitaan yhden vapausasteen mallilla. Määritä akselin jousivakio ja systeemin ekvivalentti massa olettaen akselin pitkittäis-suuntaisen nopeusjakaman olevan lineaarinen.

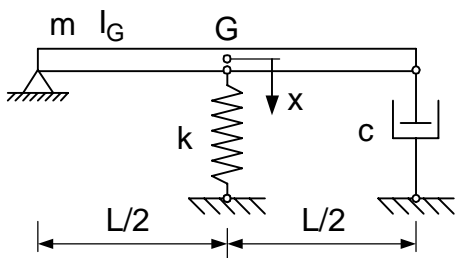
2.5 Molemmista päistään jäykästi tuetun palkille on asetettu pistemassa $m = 120$ kg. Palkin materiaalin tiheys on $\rho = 7850$ kg/m³ ja kimmomoduuli $E = 210$ GPa. Palkin pituus on $L = 4$ m ja poikkileikkaus IPE200, jonka $A = 2850$ mm² ja $I = 19,4 \cdot 10^6$ mm⁴. Systemiä tutkitaan yhden vapausasteen mallilla valiten koordinaatiksi massan m pystysiirtymä v_m . Määritä systeemin jousivakio, ekvivalentti massa ja ominaistajuus, kun massan m sijaintietäisyys a vaihtelee saaden 19 arvoa tasavälein $L/20$. Palkin dynaamisen taipumaviivan oletetaan olevan samaa muotoa kuin sen staattinen taipumaviiva. (Mathcad)



dinaatiksi massan m pystysiirtymä v_m . Määritä systeemin jousivakio, ekvivalentti massa ja ominaistajuus, kun massan m sijaintietäisyys a vaihtelee saaden 19 arvoa tasavälein $L/20$. Palkin dynaamisen taipumaviivan oletetaan olevan samaa muotoa kuin sen staattinen taipumaviiva. (Mathcad)



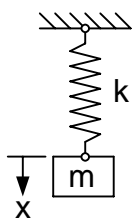
2.6 Määritä oheisen kuvan mekaanisen systeemin ekvivalentti massa m_{ekv} ja jousivakio k_{ekv} , kun koordinaattina on alemman massan vaakasiirtymä x . Laske systeemin ominaistaajuus f , kun $m_1 = 2 \text{ kg}$, $m_2 = 1 \text{ kg}$, $a = 1 \text{ m}$, $b = 2 \text{ m}$, $I_O = 4 \text{ Nm/s}^2$, $k_1 = 1000 \text{ N/m}$, $k_2 = 500 \text{ N/m}$ ja $k_t = 800 \text{ Nm}$.



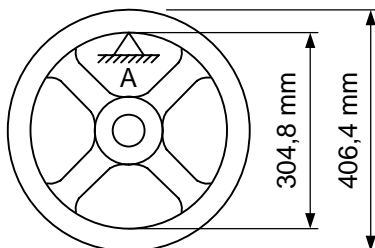
2.7 Kuvan mukaisessa systeemissä palkki oletetaan täysin jäykäksi ja jousi massattomaksi. Palkin massa on m ja hitausmomentti massakeskiön suhteen I_G . Systeemiä tarkastellaan yhden vapausasteen mallilla valiten vapausasteeksi palkin massakeskiön G pystysiirtymä x mitattuna staattisesta tasapainoasemasta. Määritä systeemin ekvivalentti

massa, vaimennus- ja jousivakio. $L = 4 \text{ m}$, $m = 120 \text{ kg}$, $I_G = 160 \text{ kgm}^2$, $k = 5 \text{ kN/m}$ ja $c = 750 \text{ Ns/m}$.

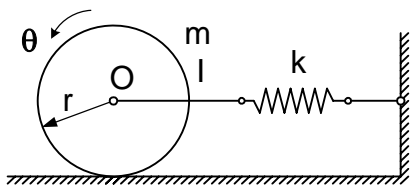
3 YHDEN VAPAUASTEEN OMINAISVÄRÄHTELY



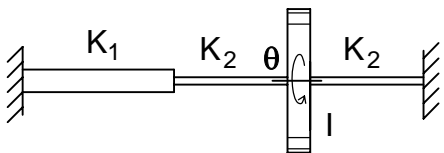
3.1 Kuvan jousi-massa-systeemin $m = 0,25 \text{ kg}$ ja $k = 0,1533 \text{ N/mm}$. Määritä systeemin ominaiskulmataajuus, ominaistaajuus, ominaisvärähdysaika ja staattinen tasapainoasema.



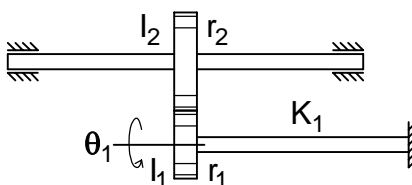
3.2 Vauhtipyörä on asetettu tuen A varaan heiluriksi kuvassa esitetyllä tavalla. Pyörän painovoima on $311,4 \text{ N}$ ja värähdysaika $1,22 \text{ s}$. Laske pyörän hitausmomentti akselin suhteen.



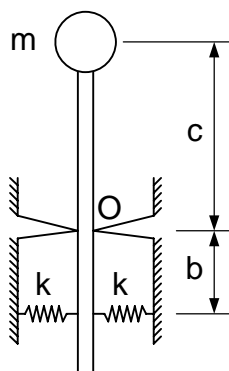
3.3 Sylinteri vierii liukumatta vaakatasolla kuvan mukaisesti. Sylinterin massa on m ja hitausmomentti massakeskiön O suhteen on I . Määritä systeemin ominaisvärähtelyjen liikeyhtälö ja ominaiskulmataajuus.



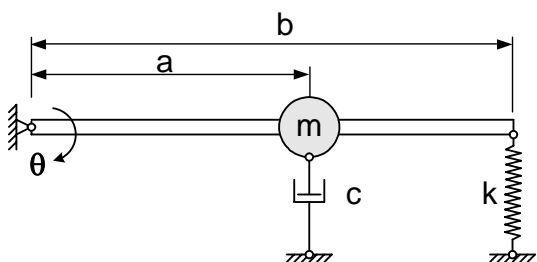
3.4 Kuvan mukaisessa systeemissä akselin osien vääntöjäykkyydet ovat K_1 ja K_2 sekä pyörän hitausmomentti I . Johda pyörän vääntövärähtelyjen liikeyhtälö ja laske ominaiskulmataajuus.



3.5 Määritä kuvan systeemin alemman akselin liikeyhtälö ja sen avulla systeemin ominaiskulmataajuus. Alemman akselin vääntöjäykkyys on K_1 , pyörien hitausmomentit I_1 ja I_2 sekä säteet r_1 ja r_2 .



3.6 Massa m on kiinnitetty painottoman sauvan päähän kuvan mukaisesti. Sauva on nivelöity kohdasta O ja tuettu kahdella jousella. Määritä systeemin ominaisaajuus Rayleigh'in periaatteella.



3.7 Kirjoita kuvan mukaisen mekaanisen systeemin liikeyhtälö, kun koordinaatiksi valitaan palkin kulma-asema θ mitattuna staattisesta tasapainoasemasta ja vaakapalkki oletetaan massattomaksi. Identifioi liikeyhtälöstä ominaiskulmataajuus ω ja vaimennussuhde ζ . Määritä vaimennettu ominaiskulmataajuus ω_d ja vaimennusvakion kriittinen

arvo c_{kr} .

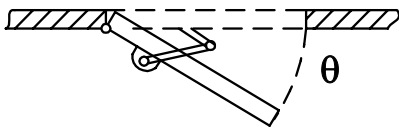
Systeemin parametrit ovat $m = 10$ kg, $k = 3$ kN/m, $a = 1,2$ m ja $b = 2$ m. Kirjoita systeemin vaimenevan ominaisvärähtelyn $\theta(t)$ lauseke, kun a) $c = 100$ Ns/m, b) $c = c_{kr}$ ja c) $c = 900$ Ns/m. Alkuehdot ovat $\theta(0) = 5^\circ$ ja $\dot{\theta}(0) = 0$. Piirrä eri tapauksista kuvaajat Mathcadillä samaan koordinaatistoon aikavälillä $[0, 1]$ s.

3.8 Iskunvaimentimen ylilyönnin halutaan olevan 10 %, ts. päästettäessä vaimennin ilman alkunopeutta liikkeelle asemasta x_0 se ohittaa tasapainoaseman määrällä $0,1 \cdot x_0$. Määritä tarvittava vaimennussuhde ζ_1 . Mikä on ylilyönti, jos vaimennussuhde on $\zeta_1/2$?

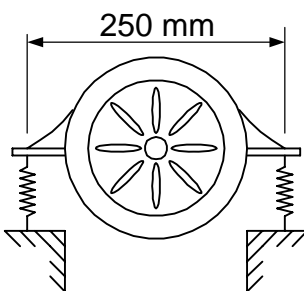
3.9 Jousi-massa-vaimennin-systeemin $m = 2,267$ kg, $k = 17,5$ N/cm ja viskoosi vaimennus on niin suuri, että peräkkäisten amplitudien suhde on 0,98. Määritä vaimennettu ominaiskulmataajuus, logaritminen dekrementti, vaimennussuhde ja vaimennusvakio.

3.10 Osoita, että logaritminen dekrementti voidaan esittää muodossa $\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{X_1}{X_{n+1}}$ missä X_{n+1} on amplitudi, kun n jaksoa on kulunut amplitudista X_1 . Piirrä käyrä, josta näkyy 50 % amplitudin pienenemiseen tarvittavien jaksojen määrä vaimennussuhteen ζ funktiona.

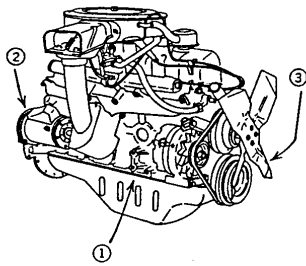
3.11 Oveen on asennettu automaattinen sulkija kuvan mukaisesti. Oven massa $m = 36$ kg, korkeus on 2 m, leveys 0,75 m ja paksuus 40 mm. Ovi avautuu vasten väntöjousta, jonka jousivakio $K = 10$ Nm/rad. Määritä tarvittava vaimennusvakio C sulkijassa, jotta vaimennus olisi kriittinen. Kauanko kestää oven sulkeutuminen asennosta $\theta = 90^\circ$ asentoon $\theta = 1^\circ$?



4 YHDEN VAPAUSASTEEN HARMONINEN PAKKOVÄRÄHTELY

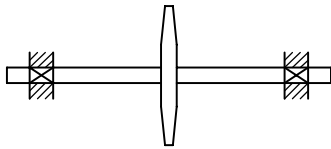


4.1 Sähkömoottorin massa on 10 kg ja se on tuettu neljällä samanlaisella jousella, joiden kunkin jousivakio on 1,6 N/mm. Asennelman hitaussäde moottorin akselin suhteen on 100 mm. Roottorin pyörimisnopeus on $n = 1750$ r/min. Määritä pystysuuntaisen värähtelyn ja keinumisvärähtelyn siirtävyydet olettaen kuormitusherätteiden olevan sinimuotoiset eli $F(t) = F_0 \sin \Omega t$ ja $M_v(t) = M_{v0} \sin \Omega t$.

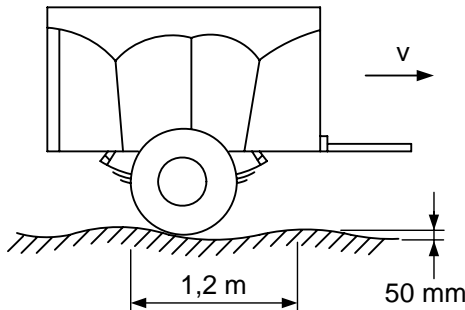


4.2 Auton moottori on kiinnitetty moottoritelineeseen kuvan mukaisesti, jolloin kiinnittimet 1 ja 3 ovat moottorin sivuilla ja kiinnittimen 2 oletetaan sijaitsevan kampiakselin kohdalla. Jokaisen kiinnittimen jousivakio on 200 N/mm , moottorin massa 125 kg sekä keinumisvärähtelyyn liittyvä hitaussäde massakeskiön suhteen 150 mm . Moottori on kuusisylinterinen ja nelitahtinen. Moottorin käynnistä syntyvät kuormituseräteet oletetaan sinimuotoisiksi. (a) Määritä pystysuuntaisen värähtelyn siirtyvyys, kun pyörimisnopeus on 2200 r/min . (b) Määritä pienin etäisyys b , jolla sivuilla olevien kiinnittimien on sijaittava kampiakselista, jotta keinumisvärähtelyn siirtyvyys ei ole suurempi kuin pystysuuntaisen värähtelyn siirtyvyys.

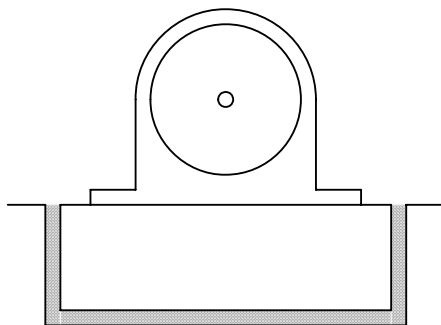
4.3 Turbiinin roottorin massa on $13,6 \text{ kg}$ ja se on kiinnitetty keskelle akselia, jonka laakeriväli on $0,4064 \text{ m}$. Roottorin epätasapaino $m_0e = 0,2879 \text{ kgcm}$. Määritä laakereihin kohdistuvat voimat pyörimisnopeuden ollessa 6000 r/min , kun akselin halkaisija on (a) $2,54 \text{ cm}$ ja (b) $1,905 \text{ cm}$. Materiaali on teräs, jonka $E = 205 \text{ GPa}$ ja $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$.



4.4 Tien epätasaisuutta kuvataan likimääräisesti sinikäyrällä, jonka jakso on $1,2 \text{ m}$ ja amplitudi 25 mm . Määritä kuvan perävaunun pystysuuntaisen värähtelyn amplitudi, kun sen nopeus on 25 km/h . Vaunun massa on 500 kg ja pyörien massa voidaan jättää huomioonottamatta. Vaunu painuu 3 mm jokaista 75 kg kuormalisäystä kohti. Pyörien oletetaan pysyvän kosketuksessa tiehen koko ajan ja vaimennusta ei oteta huomioon. Määritä resonanssitilannetta vastaava vaunun nopeus.

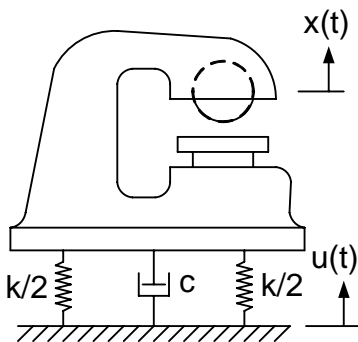
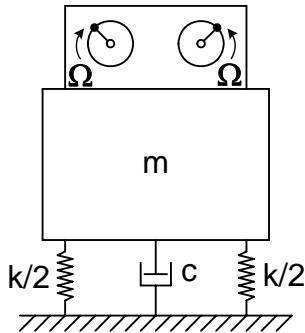


4.5 Sähkömoottori on asennettu eristinkappaleen päälle kuvan mukaisesti. Moottorin massa on 68 kg ja eristinkappaleen massa 1200 kg . Systemin ominaistajuus on $2,67 \text{ Hz}$ ja vaimennussuhde on $0,10$. Roottorin epätasapainosta syntyy harmoninen pakkovoima $F(t) = (100 \text{ N})\sin(31,4t/s)$. Määritä eristinkappaleen värähtelyn amplitudi sekä alustaan siirtyvä voima.



4.6 Pienen moottorikäyttöisen maalikompressoriyksikön massa on 27 kg ja se on tuettu neljällä kumieristimellä, joiden staattinen puristuma on 5 mm. Moottori pyörii vakionopeudella 1750 r/min. Kompressorin männän iskunpituus on 50 mm. Männän ja muiden liikkuvien osien yhteismassa on 0,5 kg, ja männän edestakainen liike oletetaan harmoniseksi. Määritä yksikön pystysuuntaisen värähtelyn amplitudi. Kumin vaimennussuhde on 0,2.

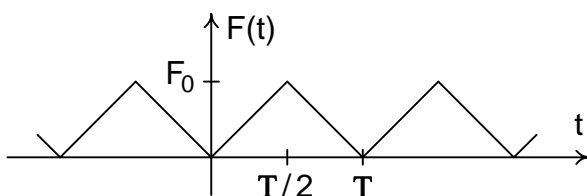
4.7 Kuvan laitetta käytetään massan m värähtelyominaisuuksien tutkimiseen. Massa on $m = 181,4$ kg ja pyörivien massojen epätasapaino $m_0e = 0,0921$ kgm. Pyörimisnopeuden ollessa 900 r/min ovat pyörivät massat ylimmässä asemassaan samanaikaisesti, kun massa m on staattisessa tasapainoasemassaan liikkeessä ylöspäin ja vastaava amplitudi on 21,6 mm. Määritä (a) systeemin ominaiskulmataajuus, (b) vaimennusvakio, (c) pyörimisnopeutta 1200 r/min vastaava amplitudi ja (d) pyörivien massojen kulma-asema massan m ollessa staattisessa tasapainoasemassa liikkeessä ylöspäin.



4.8 Tarkkuushiomakone on kiinnitetty alustaan joustavasti niin, että kiinnityksen jousivakio $k = 1$ MN/m ja viskoiin vaimennuksen vakio $c = 1$ kNs/m. Hiomakoneen massa on 510 kg. Hiomakoneen lähellä on toinen kone, jossa oleva nopeudella 6000 r/min pyörivä epätasapaino aiheuttaa alustalle pystysuuntaisen liikkeen $u(t) = b \sin \Omega t$. Määritä suurin mahdollinen alustan amplitudi b niin, että hiomakiven amplitudi ei ylitä arvoa 10^{-6} m. Laske vielä alustasta hiomakoneeseen vaikuttavan voiman maksimi-arvo.

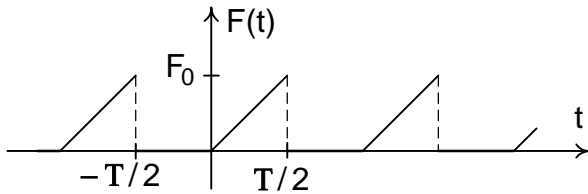
5 YHDEN VAPAUSASTEEN YLEINEN PAKOTETTU LIIKE

5.1 Jousi-massa-vaimennin-systeemin ominaisuudet ovat $m = 10$ kg, $k = 4000$ N/m ja $\zeta = 0,15$. Systeemiin vaikuttaa oheisen kuvan mukaisesti vaihteleva jaksollinen pakkovoima, jonka jaksonaika $T = 1$ s ja $F_0 = 100$ N. Määritä kuormituksen Fourier-sarja ja esitä sen kuvaaja. Piirrä kuormituksen Fourier-spektrit. Ratkaise kuormitusta



vastaava siirtymävaste $x(t)$ ja esitä sen kuvaaja. Piirrä siirtymävasteen Fourier-spektrit. Selvitä siirtymän maksimi-arvo ja vertaa sitä staattiseen siirtymään F_0/k .

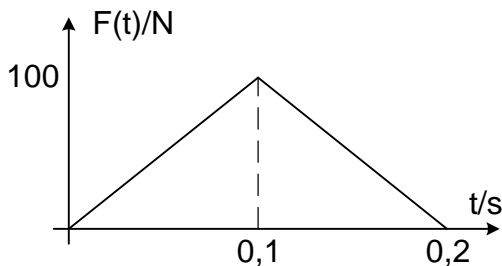
5.2 Jousi-massa-vaimennin-systeemin ominaisuudet ovat $m = 18 \text{ kg}$, $k = 25000 \text{ N/m}$ ja $\zeta = 0,2$. Systeemiin vaikuttaa oheisen kuvan mukaisesti vaihteleva jaksollinen pak-



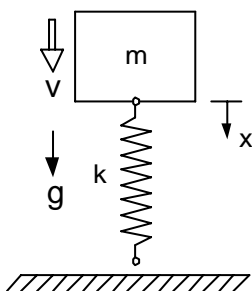
kovoima, jonka jaksonaika $T = 0,5 \text{ s}$ ja $F_0 = 200 \text{ N}$. Määritä kuormituksen Fourier-sarja ja esitä sen kuvaaja. Piirrä kuormituksen Fourier-spektrit. Ratkaise kuormitusta vastaava siirtymävaste $x(t)$ ja esitä sen kuvaaja. Piirrä siirtymävasteen Fourier-spektrit. Selvitä siirtymän maksimi-arvo ja vertaa sitä staattiseen

siirtymään F_0/k .

5.3 Jousi-massa-systeemiin vaikuttaa oheisessa kuvassa esitetty kuormituseräte. Systeemin $m = 4 \text{ kg}$ ja $k = 13000 \text{ N/m}$ ja se on ennen kuormituksen vaikutusta levossa tasapainoasemassaan. Kirjoita syntyvän siirtymävasteen lauseke ramppikuormituksen ratkaisua ja yhteenlaskuperiaatetta hyväksi käyttäen. Piirrä siirtymävasteen

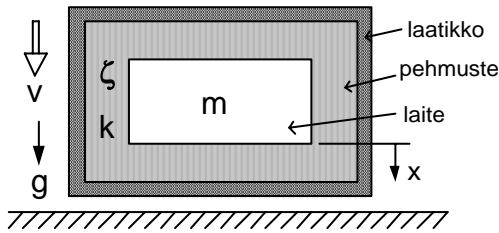


kuvaaja aikavälillä $[0, 10\tau]$. Kirjoita syntyvä siirtymävaste Duhamelin integraalia käyttäen ja piirrä sen kuvaaja. Esitä Duhamelin integraalin avulla myös vastaavan vaimennetun systeemin siirtymävaste ja piirrä sen kuvaaja vaimennussuhteen ζ arvoilla 0,05, 0,1 ja 0,2 aikavälillä $[0, 10\tau]$.



5.4 Oheisella yksinkertaisella laskentamallilla voidaan tutkia lentokoneen käyttäytymistä laskeutumisessa. Konetta mallinnetaan pistemassalla m ja pyörien jousivakio on k . Vaimennusta ei oteta huomioon. Koneen nopeuden pystykomponentti on v sen osuessa maahan hetkellä $t = 0$. Pystysiirtymä $x(t)$ mitataan siten, että $x(0) = 0$. Määritä pystysiirtymän $x(t)$ lauseke aikavälillä, jolla kone on kosketuksessa maahan. Käytä askelkuormituksen ratkaisua, impulssikuormituksen ratkaisua ja yhteenlaskuperiaatetta. Määritä myös aika t_2 , jonka kuluttua kone irtoaa maasta. Sovella

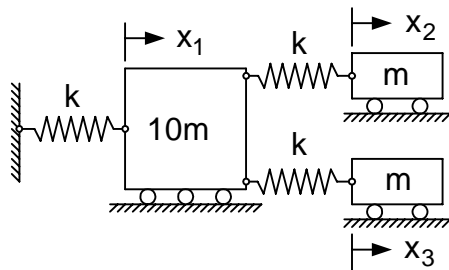
tuloksia tapaukseen $m = 1000 \text{ kg}$, $k = 5 \text{ MN/m}$ ja $v = 1 \text{ m/s}$. Määritä pystysiirtymän $x(t)$ lauseke ja piirrä sen kuvaaja aikavälillä $[0, t_2]$. Selvitä pystysiirtymän maksimi-arvo. Määritä jousivoiman $F(t)$ lauseke ensimmäisen maakosketuksen aikana ja piirrä sen kuvaaja. Selvitä voiman $F(t)$ suurin arvo.



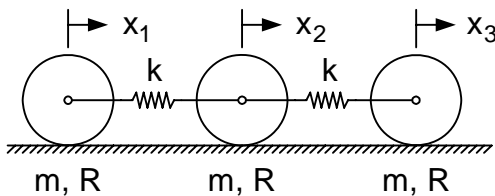
5.5 Mittalaite on pakattu pehmustettuun laatikkoon kuvan mukaisesti. Laitteen massa $m = 18 \text{ kg}$, pehmusteen jousivakio $k = 17,5 \text{ kN/m}$ ja vaimennussuhde $\zeta = 0,05$. Laatikko pudotetaan siten, että se osuu hetkellä $t=0$ alustaan nopeudella $v = 3,8 \text{ m/s}$. Törmäyksen jälkeen laatikko pysyy alustalla. Mittalaitteen pystysiirtymä $x(t)$ mitataan siten,

että $x(0) = 0$. Määritä pystysiirtymän $x(t)$ lauseke ja piirrä sen kuvaaja. Selvitä pystysiirtymän maksimiarvo. Määritä pakkauksesta laitteeseen kohdistuvan voiman $F(t)$ lauseke ja piirrä sen kuvaaja. Selvitä vielä voiman $F(t)$ suurin arvo.

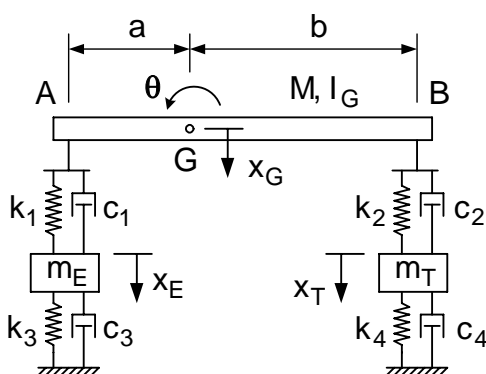
6 USEAN VAPAASTEEN SYSTEMIN LIIKEYHTÄLÖT



6.1 Määritä kuvassa esitetyn kolmen vapausasteen systeemin ominaisvärähtelyn liikeyhtälöt Newtonin lakeja käyttäen. Kirjoita liikeyhtälöt matriisimuotoon ja selvitä, millainen on liikeyhtälöiden kytkentä.

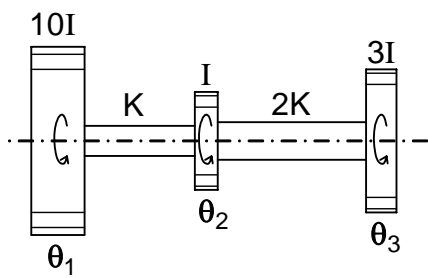


6.2 Määritä kuvassa esitetyn kolmen vapausasteen systeemin ominaisvärähtelyn liikeyhtälöt Newtonin lakeja käyttäen olettaen pyörien vierivän liukumatta vaakatasolla. Kirjoita liikeyhtälöt matriisimuotoon ja selvitä, millainen on liikeyhtälöiden kytkentä.

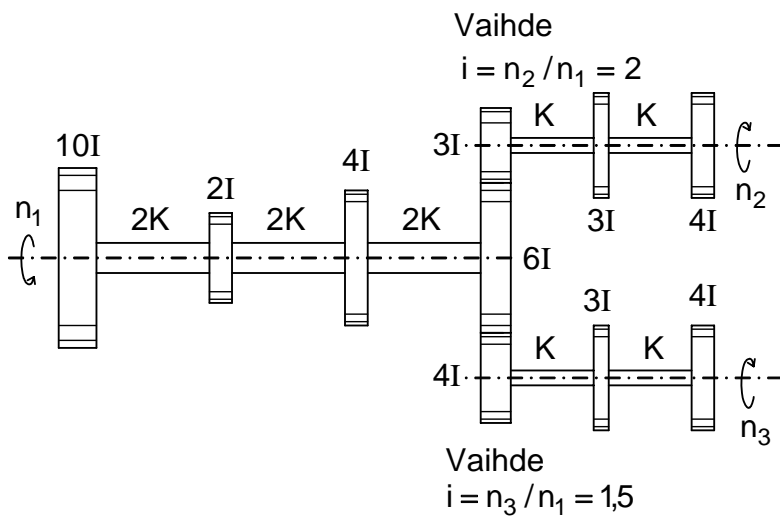


6.3 Kuvassa on ajoneuvon neljän vapausasteen laskentamalli. Ajoneuvon massa ilman pyöriä ja pyöränakseleita on M ja sitä mallinnetaan jäykällä palkilla AB , jonka hitausmomentti massakeskiön G suhteen on I_G . Pyöräparin ja akselin massa on edessä m_E ja takana m_T , etujousituksen jousivakio on k_1 ja takajousituksen k_2 , eturengasparin jousivakio on k_3 ja takarengasparin k_4 , etuiskunvaimentimien vaimennusvakio on c_1 ja takaiskunvaimentimien c_2 sekä eturengasparin vaimennusvakio on c_3 ja takarengasparin c_4 . Määritä systeemin ominaisvärähtelyn liikeyhtälöt käyttäen kuvaan merkittyjä koordinaatteja, jotka mitataan staattisesta tasapainoasemasta lähtien. Palkin rotaatiokulma oletetaan pieneksi. Esi-

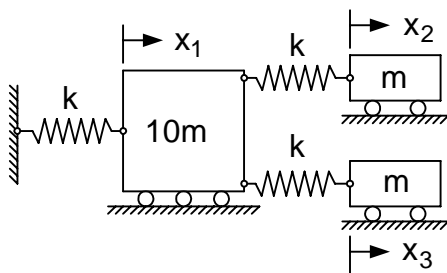
tä liikeyhtälöt matriisimuodossa ja selvitä, millainen on liikeyhtälöiden kytkentä.



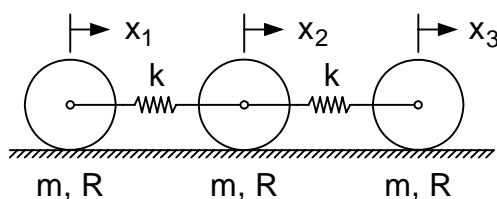
6.4 Tarkastellaan kuvan mukaisen akselin sekä sillä olevan vauhtipyörän ja kahden hammaspyörän muodostamaa systeemiä. Kuvaan on merkitty pyörien hitausmomentit ja akselin osien vääntöjousivakiot. Systeemin ominaisvärähtelyjä tutkitaan kolmen vapausasteen laskentamallilla käyttäen vapausasteina pyörien kulma-asemia θ_1 , θ_2 ja θ_3 . Määritä systeemin ominaisvärähtelyn liikeyhtälöt ja kirjoita ne matriisimuotoon.



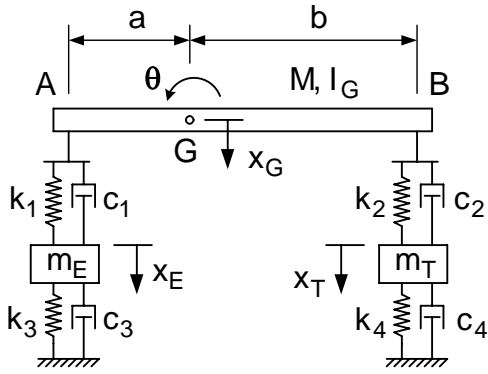
6.5 Redusoi kuvan mukainen haarautuva vääntöväärähtelysysteemi pyörimisnopeuteen n_1 . Kirjoita ekvivalenttisen systeemin ominaisvärähtelyn liikeyhtälöt ja laita ne matriisimuotoon.



6.6 Määritä kuvassa esitetyn kolmen vapausasteen systeemin ominaisvärähtelyn liikeyhtälöt Lagrangen yhtälöitä käyttäen. Kirjoita liikeyhtälöt vielä matriisimuotoon.

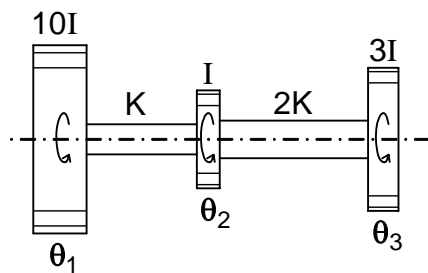


6.7 Määritä kuvassa esitetyn kolmen vapausasteen systeemin ominaisvärähtelyn liikeyhtälöt Lagrangen yhtälöitä käyttäen olettaen pyörien vierivän liukumatta vaakatasolla. Laita liikeyhtälöt matriisimuotoon.



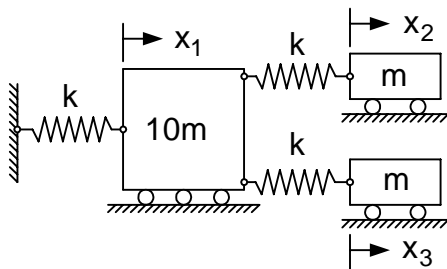
6.8 Kuvassa on ajoneuvon neljän vapausasteen laskentamalli. Ajoneuvon massa ilman pyöriä ja pyöränakseleita on M ja sitä mallinnetaan jäykällä palkilla AB , jonka hitausmomentti massakeskiön G suhteen on I_G . Pyöräparin ja akselin massa on edessä m_E ja takana m_T , etujousituksen jousivakio on k_1 ja takajousituksen k_2 , eturengasparin jousivakio on k_3 ja takarengasparin k_4 , etuiskunvaimentimien vaimennusvakio on c_1 ja takaiskunvaimentimien c_2 sekä eturengasparin vaimennusvakio on c_3 ja takarengasparin c_4 .

Johda systeemin ominaisvärähtelyn liikeyhtälöt Lagrangen yhtälöiden avulla käyttäen kuvaan merkittyjä koordinaatteja, jotka mitataan staattisesta tasapainoasemasta lähtien. Palkin rotaatiokulma oletetaan pieneksi. Esitä liikeyhtälöt vielä matriisimuodossa.

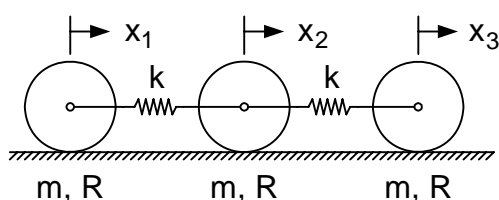


6.9 Tarkastellaan kuvan mukaisen akselin sekä sillä olevan vauhtipyörän ja kahden hammaspyörän muodostamaa systeemiä. Kuvaan on merkitty pyörien hitausmomentit ja akselin osien vääntöjousivakiot. Systeemin ominaisvärähtelyä tutkitaan kolmen vapausasteen laskentamallilla käyttäen vapausasteina pyörien kulma-asemia θ_1 , θ_2 ja θ_3 . Määritä systeemin ominaisvärähtelyn liikeyhtälöt Lagrangen yhtälöitä käyttäen ja kirjoita ne matriisimuotoon.

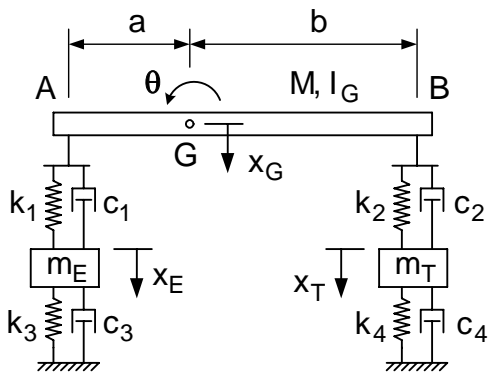
7 USEAN VAPAUASSTEEN SYSTEEMIN VAIMENEMATON OMINAISVÄRÄHTELY



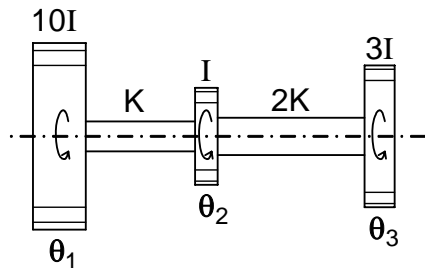
7.1 Määritä esimerkin 6.1 systeemin ominaistajuuudet ja ominaisvektorit Mathcadin genvals ja genvecs funktioita hyväksikäyttäen. Piirrä ominaisvektoreita havainnollistavat kuvat. Käytä arvoja $m = 10 \text{ kg}$ ja $k = 50 \text{ kN/m}$.



7.2 Määritä esimerkin 6.2 Ratkaise ominaistajuuudet ja ominaisvektorit Mathcadin genvals ja genvecs funktioita hyväksikäyttäen. Piirrä ominaisvektoreita havainnollistavat kuvat. Käytä arvoja $R = 1 \text{ m}$, $m = 100 \text{ kg}$ ja $k = 10 \text{ kN/m}$.

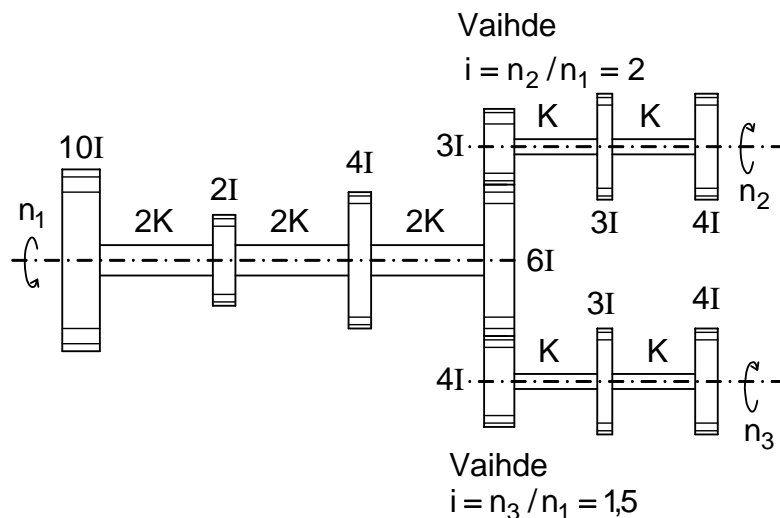


7.3 Määritä esimerkin 6.3 systeemin ominaistajuu-
juudet ja ominaisvektorit Mathcadin genvals ja
genvecs funktioita hyväksikäyttäen. Piirrä omi-
naisvektoreita havainnollistavat kuvat. Käytä
arvoja $M = 1360 \text{ kg}$, $I_G = 203 \text{ Nm} \cdot \text{s}^2$,
 $m_E = m_T = 544 \text{ kg}$, $k_1 = k_2 = 29,19 \text{ kN/m}$,
 $k_3 = k_4 = 14,60 \text{ kN/m}$, $a = 1,372 \text{ m}$ ja
 $b = 1,067 \text{ m}$.



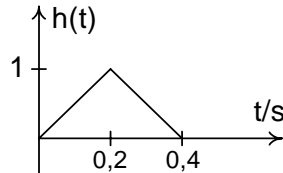
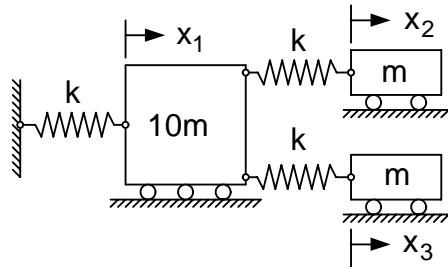
7.4 Ratkaise esimerkin 6.4 systeemin ominaistajuu-
det ja ominaisvektorit Mathcadin genvals ja
genvecs funktioita hyväksikäyttäen. Piirrä omi-
naisvektoreita havainnollistavat kuvat. Käytä arvoja
 $I = 25 \text{ Nms}^2$ ja $K = 1 \text{ kNm/rad}$.

7.5 Ratkaise esimerkin 6.5 redusoidun systeemin ominaistajuu-
det ja ominaisvektorit Mathcadin genvals ja
genvecs funktioita hyväksikäyttäen. Piirrä omi-
naisvektoreita havainnollistavat kuvat. Käytä arvoja $I = 10 \text{ Nms}^2$ ja $K = 0,6 \text{ kNm/rad}$.

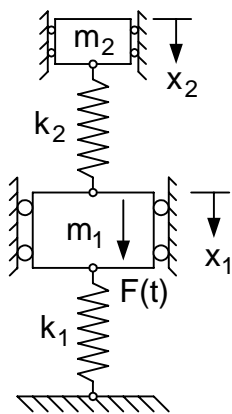


8 USEAN VAPAUASSTEEN SYSTEEMIN VAIMENEMATON PAKKOVÄRÄHTELY

8.1 Ratkaise normaalimuotomenetelmällä esimerkin 6.1 systeemin siirtymävasteet $x_1(t)$, $x_2(t)$ ja $x_3(t)$, kun kuormituksena on a) harmoninen pakkovoimavektori $\{F(t)\} = \{7f \quad -f \quad f\} \sin \Omega t$ ja b) pakkovoimavektori $\{F(t)\} = \{0 \quad 8f \quad -8f\} h(t)$, missä

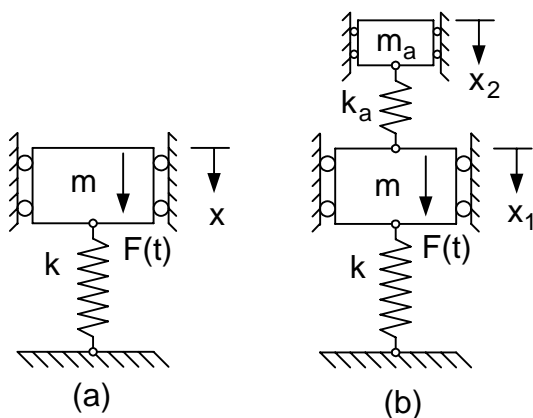


$f = 100 \text{ N}$, $\Omega = 50 \text{ rad/s}$ sekä $h(t)$ oheisen kuvan mukainen kolmiopulssi-funktio. Systeemi lähtee liikkeelle asemasta $\{x_0\} = \{0,003 \quad 0 \quad 0\} \text{ m}$ ilman alkunopeuksia.
 $m = 10 \text{ kg}$, $k = 50 \text{ kN/m}$.



8.2 Kirjoita kuvan mukaisen kahden vapausasteen systeemin liikeyhtälöt. Määritä harmonista pakkovoimavektoria $\{F(t)\} = \{F_0 \quad 0\} \sin \Omega t$ vastaava liikeyhtälöiden yksityisratkaisu $\{x(t)\}_p = \{x_{1p}(t) \quad x_{2p}(t)\}$. Osoita, että valitsemalla $k_2/m_2 = \Omega^2$, saadaan massan m_1 pakkovärähtelyn amplitudi X_1 nolllaksi, ts. systeemin osa k_2, m_2 toimii värähtelyn absorboijana. Määritä myös absorbointitilannetta vastaava massan m_2 amplitudi.

8.3 Kone on tuettu joustavasti kuvan (a) mukaisesti. Koneen massa on $m = 100 \text{ kg}$ ja tuennan jousivakio $k = 9000 \text{ N/m}$. Koneessa on roottori, jonka massa $m_0 = 1 \text{ kg}$, epäkeskeisyys $e = 0,03 \text{ m}$ ja kulmanopeus $\Omega = 10 \text{ rad/s}$, josta aiheutuu pystysuuntainen häiriövoima $F(t)$. Määritä ja piirrä tapauksen (a) pakkovärähtelyn amplitudi



$X(\Omega)$ häiriötaajuuden funktiona. Koska häiriötaajuus on lähellä ominaiskulmataajuutta, koneeseen asennetaan värähtelyn absorboija kuvan (b) mukaisesti. Absorboijan massa $m_a = 10 \text{ kg}$. Valitse absorboijan jousivakio k_a siten, että se on viritetty häiriötaajuudelle $\Omega = 10 \text{ rad/s}$. Ratkaise systeemin (b) ominaiskulmataajuudet. Määritä ja piirrä koneen ja absorboijan pakkovärähtelyn amplitudit $X_1(\Omega)$ ja $X_2(\Omega)$ häiriötaajuuden funktiona ja totea niiden arvot häiriötaajuuden kohdalla.