1 JOHDANTO

1.1 Yleistä värähtelyistä

Värähtely on yleinen luonnonilmiö, joka esiintyy myös monissa inhimillisissä toiminnoissa. Esimerkiksi kuuloaistimus perustuu tärykalvojen värähtelyyn ja puheen tuottaminen kurkunpään värähtelyyn. Varhaiset värähtelytutkimukset keskittyivät ilmiön fysikaalisen luonteen ymmärtämiseen ja sen kuvaamiseen tarvittavien matemaattisten työkalujen luomiseen. Myöhemmin värähtelyanalyysin tarve on noussut voimakkaasti esiin monien insinöörisovellusten yhteydessä, kuten esimerkiksi koneiden ja rakenteiden suunnittelussa.

Koneissa esiintyy värähtelyitä pyörivien osien epätasapainon takia tai edestakaisin liikkuvien osien vaikutuksesta. Myös koneiden tukirakenteet voivat värähdellä niihin kohdistuvien kuormitusten johdosta. Koneissa ja rakenteissa värähtelyt ovat yleensä haitallisia ja ne on pyrittävä estämään mahdollisimman tarkoin. Värähtelystä aiheutuu jaksollisesti vaihtelevia jännityksiä, joka voi johtaa väsymisvaurioihin. Koneissa värähtely voi aiheuttaa osien nopeaa kulumista ja liitoselimien löystymistä, josta saattaa seurata toimintahäiriöitä. Metallin työstöprosessin yhteydessä esiintyvä värähtely voi johtaa huonolaatuiseen työstöjälkeen. Monesti värähtelyyn liittyy myös merkittäviä meluhaittoja ja muita epämiellyttäviä tuntemuksia sille alttiina oleviin ihmisiin.

Värähtelystä syntyvien haittojen eliminoinnissa yritetään systeemin ominaisuuksiin ja kuormituksiin vaikuttamalla saada värähtelyamplitudit ja ympäristöön siirtyvät voimat niin pieniksi, että haitat voidaan katsoa merkityksettömiksi. Koneiden käyttönopeuksien kasvaessa tulee värähtelyanalyysillä olemaan yhä suurempi osuus koneensuunnittelussa. Myös rakenteiden suunnittelussa on värähtelyiden hallitseminen tullut entistä tärkeämmäksi, koska materiaalien lujuusominaisuuksien parantuessa ne voidaan suunnitella yhä kevyemmiksi, jolloin vastaavasti värähtelyherkkyys kasvaa.

Konetekniikasta löytyy myös useita sovelluksia, joissa värähtelyjä käytetään hyväksi. Tällaisia ovat esimerkiksi sekoittimet, seulat, syöttimet ja tärinäkuljettimet.

1.2 Värähtelyyn liittyviä peruskäsitteitä

Mekaanisen systeemin liiketilaa, joka toistuu määrä-ajan kuluttua joko täysin tai lähes samanlaisena, sanotaan värähtelyksi. Tyypillisiä esimerkkejä värähtelyliikkeestä ovat heilurin heilahdusliike ja kielisoittimen kieleen näppäiltäessä syntyvä liike.

Värähtelevään systeemiin kuuluu yleensä potentiaalienergiaa varastoivia osia (jouset ja materiaalin kimmoisuus), liike-energiaa varastoivia osia (massat ja hitausmomentit) ja vaimennusosia, jotka muuntavat systeemin mekaanista energiaa toiseen muotoon (vaimentimet ja kitka). Värähtelevän systeemin mekaaninen energia koostuu sen potentiaalienergiasta ja liike-energiasta ja värähtelyliikkeen aikana näiden keskinäiset suuruussuhteet vaihtelevat. Vaimennuksen johdosta systeemin mekaaninen energia vähenee ja samalla värähtelyliikkeen amplitudi pienenee jokaisella värähtelyjaksolla paitsi, jos systeemiin tulee ulkopuolelta riittävästi korvaavaa mekaanista energiaa.

Olipa kyseessä värähtelyn haittavaikutusten eliminointi tai hyötykäyttö, suunnittelutehtävän ratkaiseminen edellyttää värähtelyilmiön laskennallista analysointia. Suunnittelussa pyritään valitsemaan tarkasteltavaan värähtelyyn vaikuttavat ominaisuudet (massa, jäykkyys ja vaimennus) sopiviksi. Yleensä nämä ominaisuudet ovat systeemiin jatkuvasti mutta eivät tasaisesti jakaantuneita. Tästä seuraa, että systeemin dynaamista käyttäytymistä kuvaavat liikeyhtälöt ovat osittaisdifferentiaaliyhtälöitä. Osittaisdifferentiaaliyhtälöiden analyyttinen ratkaiseminen on yleensä hankalaa ja onnistuu vain hyvin yksinkertaisissa perustapauksissa.

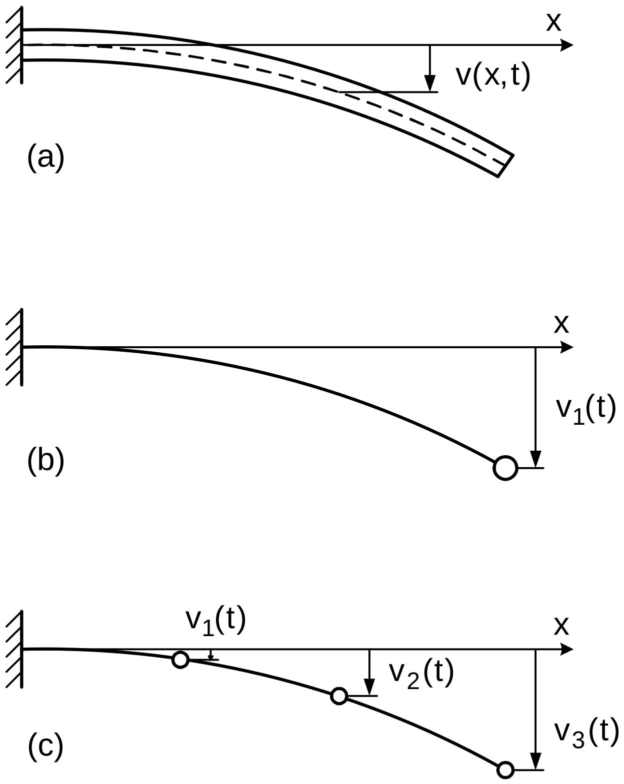
Käytännössä todellista konetta tai rakennetta joudutaan aina käsittelemään sen huomattavasti yksinkertaistetun mallin avulla. Laskentamallin valinta muodostaa vaativan ja merkityksellisen osatehtävän tutkittaessa systeemin dynaamista käyttäytymistä. Tulosten tarkkuus ja laskentatyön määrä ovat ratkaisevasti riippuvaisia valitusta laskentamallista. Mallin on toteutettava ainakin seuraavat vaatimukset:

- Mallin ominaisuuksien tulee vastata riittävän hyvin systeemin todellista käyttäytymistä.
- Mallia vastaavat liikeyhtälöt on voitava ratkaista tarkasteltavan tapauksen merkitykseen nähden kohtuullisessa ajassa ja kohtuullisin kustannuksin.

Käsin laskettaessa laskentamallin on oltava melko yksinkertainen, mutta jos käytetään elementtimenetelmäohjelmistoja, voidaan laatia yksityiskohtaisia malleja myös laajoille systeemeille. Alustavissa laskelmissa joudutaan kuitenkin usein turvautumaan käsilaskentaan, jolloin tarvitaan yksinkertaisia, mutta riittävän tarkan likiratkaisun antavia malleja. Laskentamallit jaetaan kolmeen ryhmään seuraavasti:

- Diskreetit l. keskitettyjen parametrien mallit
- Jatkuvat mallit
- Yhdistetyt mallit

Diskreetti malli koostuu pistemäisistä massoista ja hitausmomenteista sekä näitä yhdistävistä ja kiinnittävistä jousista ja vaimentimista. Jouset ja vaimentimet oletetaan usein massattomiksi. Diskreettiä mallia kutsutaan rakenteensa takia myös jousi-massa-vaimennin malliksi. Tämän mallin matemaattisessa tarkastelussa tarvittavat liikeyhtälöt voidaan muodostaa helposti ja siksi sitä käytetään yleisesti. Diskreetissä mallissa todellisen mekaanisen systeemin jakaantuneet ominaisuudet on keskitetty erillisiksi osiksi ja osien lukumäärä, tyyppi ja keskinäinen kytkentä pyritään valitsemaan mahdollisimman hyvin todellisuutta kuvaaviksi. Jatkuva malli koostuu osista, joiden massa-, jäykkyys- ja vaimennusominaisuudet ovat jakaantuneet jatkuvasti osan koko alueelle. Esimerkiksi lujuusopin taivutuspalkin mallissa palkin jäykkyysominaisuus on sen taivutusjäykkyys ja massaominaisuus palkin massa pituusyksikköä kohti, ja ne jakaantuvat koko palkin pituudelle. Yhdistetty malli sisältää sekä jatkuvasti että diskreetisti mallinnettuja osia. Diskreetin mallin käyttäytymistä kuvaavat liikeyhtälöt ovat toisen kertaluvun tavallisia differentiaaliyhtälöitä, kun taas jatkuvien mallien liikeyhtälöt ovat toisen kertaluvun osittaisdifferentiaaliyhtälöitä. Tästä voidaan päätellä, että diskreettien mallien liikeyhtälöiden ratkaiseminen on huomattavasti yksinkertaisempi tehtävä kuin jatkuvien mallien yhtälöiden ratkaiseminen.



Kuva 1.1 Ulokepalkin laskentamalleja.

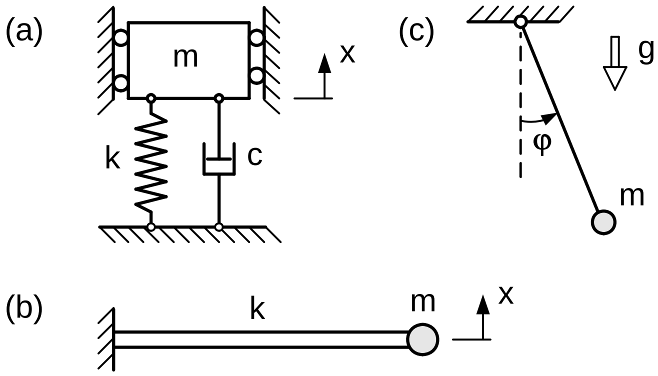
Kuvassa 1.1 on kolme ulokepalkin laskentamallia. (a) on jatkuvan massan malli, jossa palkin massa on jakaantunut sen koko pituudelle. (b) ja (c) ovat diskreetin massan malleja, jossa palkin massa on keskitetty sen tiettyihin pisteisiin. Kuvan 1.1 (a) jatkuvan mallin liikeyhtälö on palkin taipuman $v(x,t)$ toisen kertaluvun osittaisdifferentiaaliyhtälö muuttujien x ja t (aika) suhteen. Kuvan 1.1 (b) tapauksessa liikeyhtälö on pistemassan siirtymän $v_1(t)$ toisen kertaluvun tavallinen differentiaaliyhtälö muuttujan t suhteen ja kuvan 1.1 (c) tilanteessa massojen siirtymien $v_1(t)$, $v_2(t)$ ja $v_3(t)$ kolmen tavallisen differentiaaliyhtälön ryhmä.

Valittaessa systeemille laskentamalli tulee myös mallin vapausasteiden lukumäärä määrätyksi. Tämä tarkoittaa seuraavaa:

> Laskentamallin vapausasteiden lukumäärällä tarkoitetaan niiden toisistaan riippumattomien koordinaattien lukumäärää, jotka tarvitaan ilmaisemaan värähtelevän mekaanisen systeemin asema kullakin ajan hetkellä.

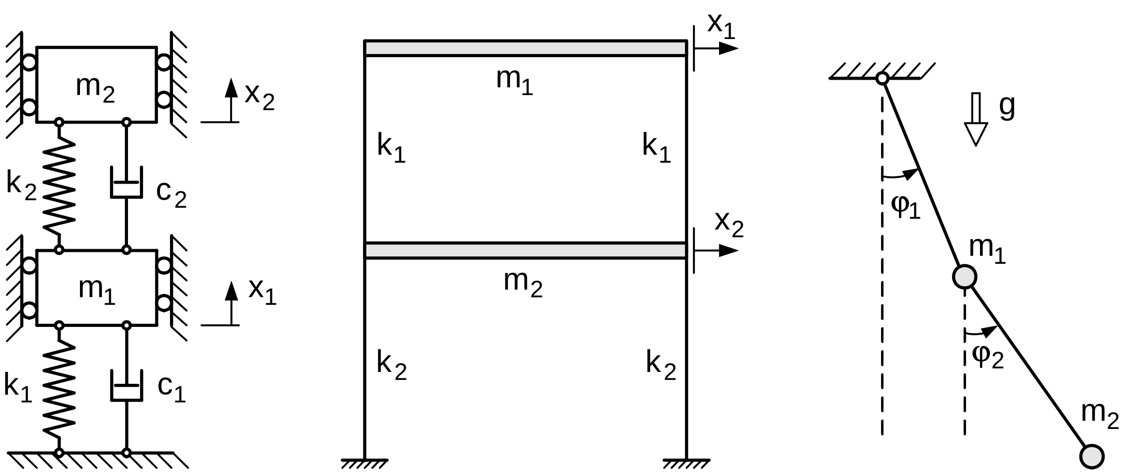
Todellisen rakenteen vapausasteiden lukumäärä on ääretön, koska se koostuu äärettömän monesta massapisteestä. Mekaaninen systeemi voidaan usein kuvata riittävän tarkasti diskreetillä mallilla, joka koostuu äärellisestä määrästä jousia, massoja ja vaimentimia. Tällöin kullekin partikkelille tarvitaan yleisessä tapauksessa kolme koordinaattia ja jäykälle kappaleelle kuusi koordinaattia. Partikkelin tai kappaleen liike on usein rajoitettu niin, että koordinaatteja tarvitaan yleistä tapausta vähemmän.

Yksinkertaisimman tapauksen muodostavat yhden vapausasteen systeemit, joista on esitetty esimerkkejä kuvassa 1.2. Kuvissa 1.2 (a) ja (b) massan m liike on rajoitettu tapahtumaan kuvatasossa ja pystysuunnassa, jolloin systeemin asema voidaan ilmoittaa siirtymäkoordinaatilla x. Kuvassa 1.2 (c) pistemassa on kiinnitetty massattoman ja jäykän sauvan päähän ja systeemi voi heilahdella sauvan toisessa päässä olevan nivelen ympäri kuvatasossa. Tällöin liikettä kuvaavaksi koordinaatiksi voidaan valita pystysuunnasta mitattu kulma φ.

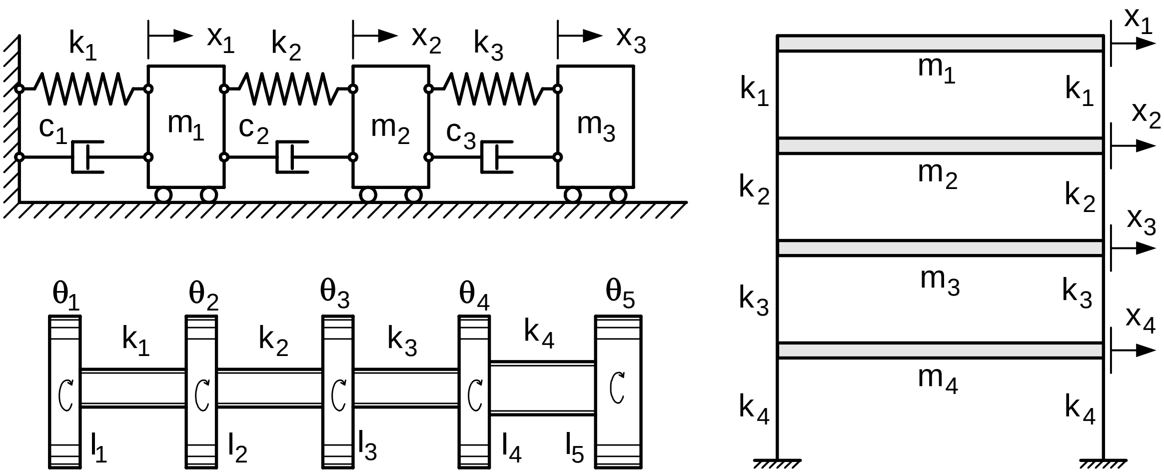


Kuva 1.2 Yhden vapausasteen malleja.

Kuvan 1.2 (c) tilanteesta tulee kahden vapausasteen systeemi, kun myös kuvatasoa vastaan kohtisuora liike sallitaan. Kuvassa 1.3 on esitetty lisää kahden vapausasteen systeemejä vapausasteineen. Kuvassa 1.4 on monen vapausasteen systeemejä sekä niiden kuvaamiseen tarvittavat koordinaatit.



Kuva 1.3 Kahden vapausasteen malleja.



Kuva 1.4 Monen vapausasteen malleja.

Käsilaskennassa ei voida käyttää kovin montaa vapausastetta, sillä tehtävän ratkaiseminen hankaloituu nopeasti vapausasteiden määrän lisääntyessä. Suurien systeemien analysoinnissa on käytettävä tietokonetta ja elementtimenetelmää. Elementtimenetelmässä tarkasteltava rakenne jaetaan yksinkertaisiin osiin eli elementteihin, jotka liittyvät toisiinsa solmuissa. Elementit ja solmut muodostavat elementtiverkon eli laskentamallin. Laskentamallin vapausasteiden lukumäärä on sama kuin elementtiverkon vapaiden solmusiirtymien lukumäärä, joka voi olla huomattavan suuri (jopa miljoonia), mikäli käytettävissä olevat laskentaresurssit sen sallivat.

1.3 Värähtelyiden luokittelu

Mekaanisen systeemin värähtelyt jaetaan ominaisvärähtelyihin ja pakkovärähtelyihin. Kun massasysteemi poikkeutetaan tasapainoasemastaan ja jätetään liikkumaan omin päin, pyrkivät palautusvoimat (kimmovoima, painovoima) tuomaan systeemin takaisin tasapainoasemaan. Tämän se saavuttaa yleensä nollasta poikkeavalla nopeudella, mikä vie systeemin jälleen pois tasapainoasemasta. Tätä yhä uudestaan toistuvaa liikettä sanotaan systeemin ominaisvärähtelyksi. Jos systeemiin vaikuttaa liikkeen tapahtuessa palautusvoimien lisäksi ulkoisia kuormituksia eli pakkovoimia, sanotaan syntyvää liikettä pakotetuksi liikkeeksi. Pakkovoimat vaihtelevat usein jaksollisesti, jolloin syntyvä liike on myös jaksollista ja sitä kutsutaan pakkovärähtelyksi.

Ominais- tai pakkovärähtely voi olla luonteeltaan vaimenematonta, jolloin systeemissä ei ole ulkoista eikä sisäistä kitkaa. Vaimenematon värähtely jatkuu ikuisesti. Todellisuudessa mekaanisen systeemin värähtelyt ovat aina vaimenevia, koska kitkavoimat vähentävät systeemin mekaanista energiaa, joka johtaa värähtelyamplitudien pienenemiseen. Värähtelyanalyysissa vaimennuksen huomioon ottamiseen käytetään likimääräisiä vaimennusmalleja, joita ovat esimerkiksi viskoosin kitkan, coulombisen kitkan ja rakenteellisen vaimennuksen mallit.

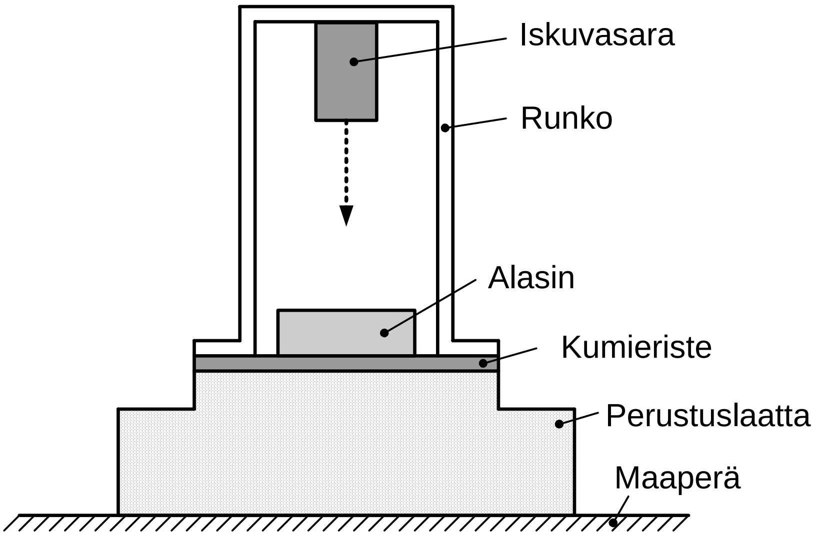
Värähtelyt ovat lineaarisia, jos systeemin siirtymät ovat pienet (geometrinen lineaarisuus) ja materiaalin käyttäytymistä kuvaavat yhtälöt ovat lineaariset (materiaalin lineaarisuus). Lineaarisille värähtelyille voidaan käyttää yhteenlaskuperiaatetta. Epälineaarisen värähtelyn laskennallinen tarkastelu on hankalaa ja onnistuu usein vain numeerisesti. Tästä johtuen värähtelyjä tarkastellaan yleensä lineaarisina, mikäli se on suinkin mahdollista edes kohtuullisella tarkkuudella.

1.4 Värähtelyiden analysointi

Värähtelevä mekaaninen systeemi on dynaaminen järjestelmä, jonka herätteinä olevat kuormitukset ja seurauksena olevat liikevasteet ovat ajasta riippuvia. Systeemin vasteet riippuvat myös sen alkutilasta, eli siitä, mistä asemista ja millä nopeuksilla värähtely alkaa. Useimmat käytännön systeemit ovat niin mutkikkaita, että laskennalliseen värähtelyanalyysiin on mahdotonta ottaa mukaan kaikkia systeemin yksityiskohtia. Värähtelyiden analysointi suoritetaan tästä johtuen lähes aina todellista systeemiä kuvaavan yksinkertaistetun matemaattisen mallin avulla.

Mekaanisen systeemin värähtelyanalyysi voidaan jakaa neljään vaiheeseen, jotka ovat laskentamallin laadinta, mallia vastaavien liikeyhtälöiden johtaminen, liikeyhtälöiden ratkaiseminen ja saatujen tulosten tulkinta.

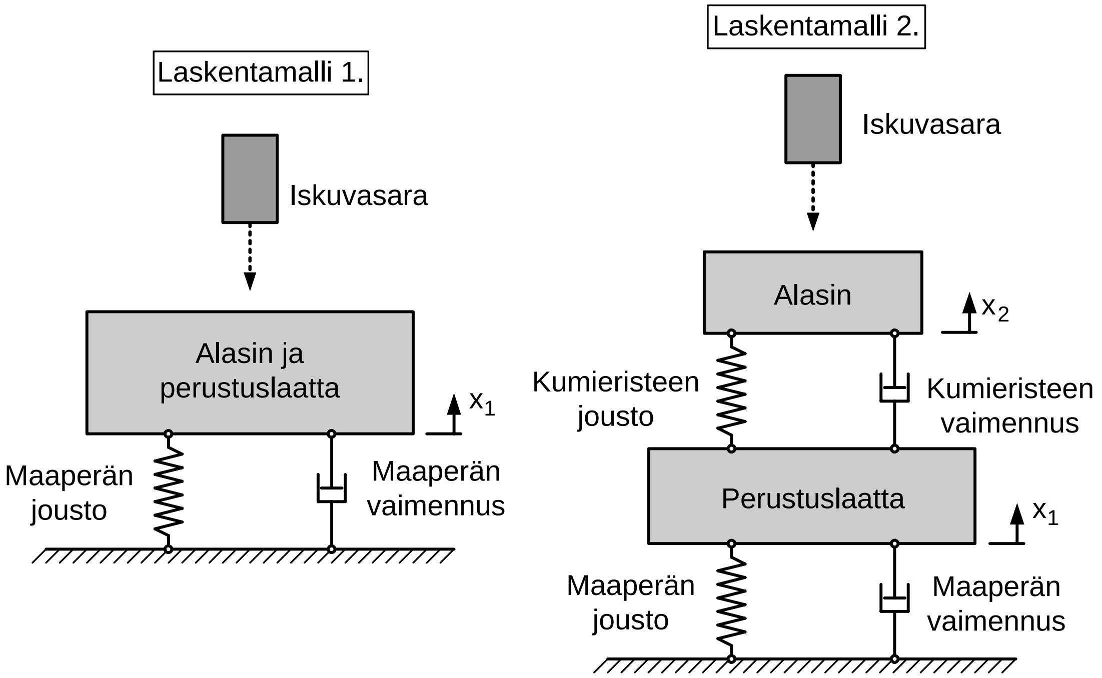
Laskentamallin laadinnassa on tavoitteena esittää ne mallinnettavan systeemin ominaisuudet, jotka vaikuttavat oleellisesti sen käyttäytymiseen. Mallin on siis oltava tarpeeksi yksityiskohtainen, jotta se kuvaisi riittävällä tarkkuudella todellisen systeemin käyttäytymistä. Toisaalta mallista ei kannata tehdä tarpeettoman yksityiskohtaista, vaan on otettava huomioon sen avulla suoritettavan analyysin tarkoitus ja käytettävissä olevat laskentaresurssit. Sopivan mallin valinta ei aina ole helppoa ja vaatii monesti kokemusta tutkittavasta systeemistä tai sen kanssa samankaltaisista tilanteista. Suunnittelun alkuvaiheessa käytetään usein mahdollisimman yksinkertaista mallia, jonka tarkoituksena on antaa alustava näkemys systeemin käyttäytymisestä. Tätä mallia voidaan sitten jatkossa täydentää tarkempien tulosten saamiseksi. Kuvassa 1.5 on periaatekuva taonnasta ja kuvassa 1.6 on kaksi laskentamallia tämän tilanteen tutkimiseen. Laskentamalli 1 on yhden vapausasteen malli, jossa kaikki värähtelevät massat on keskitetty yhdeksi massaksi ja kumieristeen vaikutukset on jätetty ottamatta huomioon. Tämän mallin avulla voidaan arvioida esimerkiksi systeemin pystysuuntaisen värähtelyn alin ominaistaajuus ja maaperään siirtyvän voima. Laskentamalli 2 on hieman tarkempi kahden vapausasteen malli, jolla voidaan tutkia alasimen ja peruslaatan värähtelyliikkeitä erikseen ja kumieristeen vaikutus on myös otettu mukaan. Tarkemman mallin avulla saadaan arviot kahdelle alimmalle ominaistaajuudelle ja maaperään siirtyvän voiman lisäksi voidaan tutkia alasimen ja perustuslaatan välistä voimaa.



Kuva 1.5 Periaatekuva taonnasta.

Kun laskentamalli on valittu, on muodostettava sitä vastaavat liikeyhtälöt. Liikeyhtälöiden johtamisessa käytetään tavanomaisia dynamiikan periaatteita. Johto voi perustua systeemin massoista laadittuihin vapaakappalekuviin ja niistä kirjoitettuihin Newtonin II lain mukaisiin liikeyhtälöihin. Vaihtoehtoisesti voidaan käyttää myös mekaniikan työ ja energiaperiaatteita.

Laskentamallin vasteen selville saamiseksi pitää sen liikeyhtälöt ratkaista. Värähtelymekaniikan liikeyhtälöiden ratkaisemiseen on käytettävissä useita matemaattisia menetelmiä. Jos liikeyhtälöt ovat lineaariset, on niiden analyyttinen ratkaiseminen melko usein mahdollista, jos kyseessä on muutaman vapausasteen diskreetti malli. Jos vapausasteita on paljon tai laskentamalli on epälineaarinen tai sisältää jatkuvia osia, on yleensä turvauduttava numeeriseen ratkaisemiseen tietokoneen avulla.



Kuva 1.6 Laskentamalleja.

Liikeyhtälöiden ratkaisuna saatujen tulosten käyttökelpoisuus riippuu siitä, kuinka hyvin valittu laskentamalli pystyy kuvaamaan todellisen systeemin käyttäytymistä. Suunnittelijan on aina arvioitava saamiaan tuloksia kriittisesti ja tarvittaessa kehitettävä laskentamalliaan niin, että laskennan perusteella tehtävät suunnittelupäätökset ovat luotettavalla pohjalla.