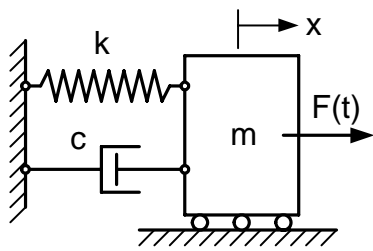


2 VÄRÄHTELEVÄN SYSTEEMIN OSAT

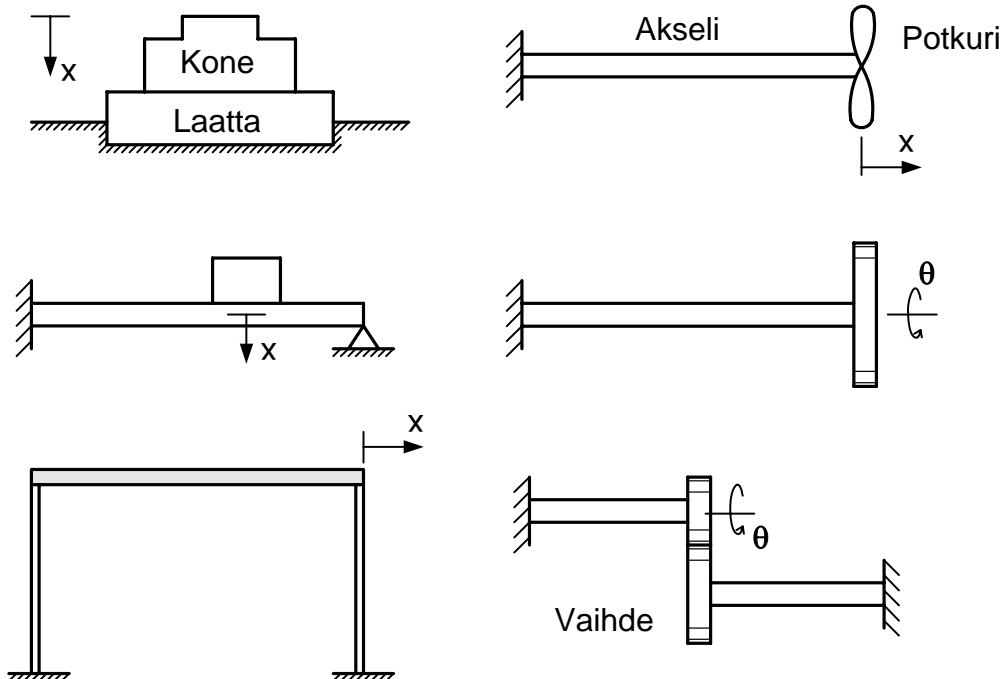
2.1 Johdanto

Kuvassa 2.1 on yhden vapausasteen värähtelyiden tarkasteluissa käytettävä perusmalli eli jousi-massa-vaimennin malli, joka sisältää kaikki värähtelevän systeemin peruselementit. Ominaisvärähtely syntyy, kun massa m poikkeutetaan staattisesta tasapainoasemastaan ja päästetään liikkumaan vapaasti ilman ulkoisten kuormitusten vaikutusta. Pakkovärähtely syntyy, kun massa m vaikuttaa jokin ajasta riippuva ulkoinen voima $F(t)$.



Kuva 2.1 Perusmalli.

Kuvan 2.1 perusmalli esiintyy sellaisenaan käytännössä melko harvoin. Sen tutkiminen on kuitenkin perusteltua, sillä monen yhden vapausasteen systeemin käyttäytymisen on analoginen perusmallin kanssa ja niitä voidaan analysoida perusmallia käyttäen. Kuvassa 2.2 on tilanteita, joita sopivasti approksimoiden voidaan kuvata yhden vapausasteen jousi-massa-vaimennin mallilla. Kaikkien kuvan 2.2 tapauksien värähtelyä kuvaavat liikeyhtälöt ovat samaa muotoa ja eroavat vain yhtälöissä esiintyvien parametrien osalta. Vaikka seuraavissa luvuissa esitettävä yhden vapausasteen värähtelyjen teoria käsittelee kuvan 2.1 perusmallia, on selvää, että saatavaa teoriaa voidaan analogian perusteella käyttää huomattavasti laajemminkin.



Kuva 2.2 Perusmallin kanssa analogisia tilanteita.

Ennen värähtelyteorian käsittelyä tarkastellaan systeemin peruselementtien ominaisuuksia puuttumatta vielä niistä koottujen mekaanisten systeemien ominaisuuksiin.

2.2 Jousi

2.2.1 Jousiyhtälö ja jousen kimmoenergia

Jouset ovat joustavia rakennneosia systeemin kahden kappaleen tai kappaleen ja tuennan välillä. Jouset luokitellaan niiden vastaanottaman kuormituksen perusteella veto/puristus-, leikkaus-, taivutus- ja vääntöjousiin. Jousen massa tai rotaatiohitaus on usein niin pieni systeemin muihin kappaleisiin verrattuna, että se voidaan jättää kokonaan huomioonottamatta. Toisinaan jousen inertia vaikutus on kuitenkin merkittävä, jolloin yksinkertaisin tapa sen huomioon ottamiseksi on ekvivalenttisen massan tai hitausmomentin käyttö. Jousi toimii myös jossain määrin liikettä vaimentavana osana kitkan ja jousimateriaalin sisäisen vaimennuksen johdosta. Tätä vaikutusta voidaan tarkastella lisäämällä systeemiä kuvaavaan laskentamalliin sopiva vaimenninelementti, kuten esimerkiksi viskoosi tai kitkavaimennin.



Kuva 2.3 Veto/puristusjousi.

Seuraavassa esitetyt tarkastelut koskevat lähinnä veto/puristusjousta, jota kuvaava symboli on kuvassa 2.3, mutta analogiset tulokset pätevät muillekin jousityypeille. Kun jouseen ei vaikuta ulkoista kuormitusta, sanotaan sen olevan lepopituudessa. Merkitään symbolilla x jousen pituuden muutosta mitattuna lepopituudesta.

Jousta venyttävän tai puristavan voiman F ja sen pituuden muutoksen x välillä on matemaattinen yhteys muotoa

$$F = f(x) \quad (2.1)$$

jossa f on jousen materiaalista ja geometriasta riippuva funktio. Kehittämällä funktio f Taylorin sarjaksi kohdassa $x = 0$ saadaan

$$F = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3 + \dots \quad (2.2)$$

jossa $k_0 = 0$, koska määritelmän mukaan voima $F = 0$, kun $x = 0$. Jos jousella on samat veto- ja puristusominaisuudet, voi lausekkeessa (2.2) olla vain muuttujan x parittomia potensseja eli se on muotoa

$$F = k_1 x + k_3 x^3 + k_5 x^5 \dots \quad (2.3)$$

Kaikki veto- ja puristusominaisuuksiltaan samanlaiset jouset käyttäytyvät jossain määrin epälineaarisesti kaavan (2.3) mukaisesti. Pituuden muutoksen korkeampia

potensseja sisältävät termit ovat usein pieniä ensimmäiseen lineaariseen termiin verrattuna ja ne voidaan jättää pois. Tällöin jousiyhtälö yksinkertaistuu muotoon

$$F = k x \quad (2.4)$$

Kaavan (2.4) mukaisesti käyttäytyvää jouta sanotaan lineaariseksi.

Tarkastellaan kuvan 2.3 mukaista lineaarista jouta, joka siis käyttäytyy kaavan (2.4) mukaisesti. Kun jousen lepopituudesta mitattu pituuden muutos x muuttuu arvosta x_1 arvoon x_2 , tekee jousen voima työn

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{x_1}^{x_2} k x dx = \frac{1}{2} k x_2^2 - \frac{1}{2} k x_1^2 \quad (2.5)$$

Tulos riippuu jousivakion lisäksi vain pituuden muutoksen x alku- ja loppuarvosta, joten jousivoima on konservatiivinen. Jousivoimaa vastaava potentiaalifunktio on siis

$$V = \frac{1}{2} k x^2 \quad (2.6)$$

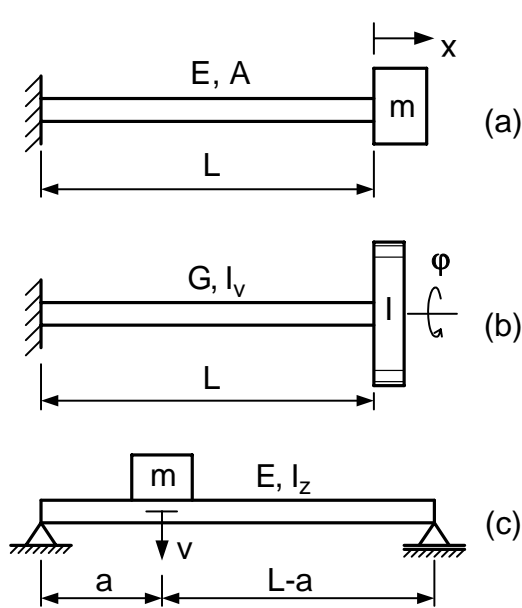
Kaavan (2.6) suuretta V sanotaan jousen kimmoenergiaksi. Jousen voiman tekemä työ tietyllä pituudenmuutosvälillä on yhtä suuri kuin sen kimmoenergian muutos.

2.2.2 Rakenneosat jousina

Tavanomaiset lujuusopissa määritellyt rakenneosat kuten veto/puristussauva, palkki ja vääntösauva voidaan tulkita jousiksi valitsemalla käyttöön sopiva muodonmuutos ja selvittämällä lujuusopin avulla vastaava jousivakio. Kuvassa 2.4 (a) on veto/puristussauva, jonka toinen pää on jäykästi kiinnitetty ja toiseen päähän on kiinnitetty sauvan massa verrattuna suuri massa m . Massa m voi liikkua sauvan suunnassa ja sauvan lepopituudesta mitattu siirtymä on x . Sauvaa voidaan tarkastella massattomana veto/puristus-jousena, jonka jousivakio on

$$k = \frac{EA}{L} \quad (2.7)$$

jossa E on materiaalin kimmomoduuli, A poikkileikkauksen pinta-ala ja L pituus. Kuvassa 2.4 (b) on vääntösauva, jonka toinen pää on jäykästi kiinnitetty ja toiseen päähän on kiinnitetty kiekko, jonka hitausmomentti I vääntöakselin suhteen on suuri verrattuna vääntösauvan rotaatiohitauteen. Kiekko voi kiertyä sauvan vääntöakselin ympäri ja sauvan vääntymättömästä asennosta mitattu kiertymä on φ . Vääntösauvaa voidaan pitää rotaatiohitaudettomana vääntöjousena, jonka jousivakio on



$$k_{\varphi} = \frac{GI_v}{L} \quad (2.8)$$

jossa G on materiaalin liukumoduuli, I_v poikkileikkauksen vääntöneliömomentti ja L pituus. Kuvassa 2.4 (c) on kaksitukinen palkki, jonka tietylle kohdalle a on sijoitettu pistemassa m , joka on suuri palkin massaan verrattuna. Palkki taipuu kuormituksen johdosta ja lujuusopin perusteella tiedetään, että pistevoima $F = mg$ aiheuttaa kohtaan a taipuman

$$v = \frac{Fa^2(L-a)^2}{3EI_zL} \quad (2.9)$$

Kuva 2.4 Rakenneosia.

jossa I_z on poikkileikkauksen taivutusneliömomentti. Kun muodonmuutokseksi valitaan taipuma v , voidaan tätä palkkia pitää taivutusjousena, jonka jousivakio on

$$k_t = \frac{3EI_zL}{a^2(L-a)^2} \quad (2.10)$$

Vastaavasti voidaan käsitellä esimerkiksi ulokepalkkia ja molemmista päistään jäykästi kiinnitettyä palkkia.

2.2.3 Ekvivalentti jousi

Sovelluksissa esiintyy usein useamman jousen yhdistelmiä, jotka voidaan laskennassa korvata yhdellä mallin toiminnan kannalta samanarvoisella eli ekvivalentilla jousella. Kaikki jousiyhdistelmät syntyvät käyttämällä tietyssä järjestyksessä kahta kytkennän perustyyppiä, jotka ovat rinnankytkentä ja sarjaan kytkentä.

Kuvassa 2.5 (a) on pistemassan m tuenta, jossa on n kpl rinnan kytkettyjä jousia. Jokaisen jousen pituudenmuutos x on sama, mutta jousivoimat ovat erisuuria, mikäli jousivakiot eivät ole samoja. Massan m liiketilaa tutkittaessa tämä jousiyhdistelmä voidaan korvata kuvan 2.5 (b) yhdellä samanarvoisella jousella, jonka jousivakio k_{ekv} saadaan laskettua alkuperäisistä jousivakioista. Massaan vaikuttavien ulkoisten voimien resultantti F on yhtä suuri kuin jousivoimien summa eli

$$F = k_1 x + k_2 x + k_3 x + \dots + k_n x = \left(\sum_{i=1}^n k_i \right) x = k_{ekv} x \quad (2.11)$$

josta nähdään, että rinnankytkennän ekvivalentti jousivakio on

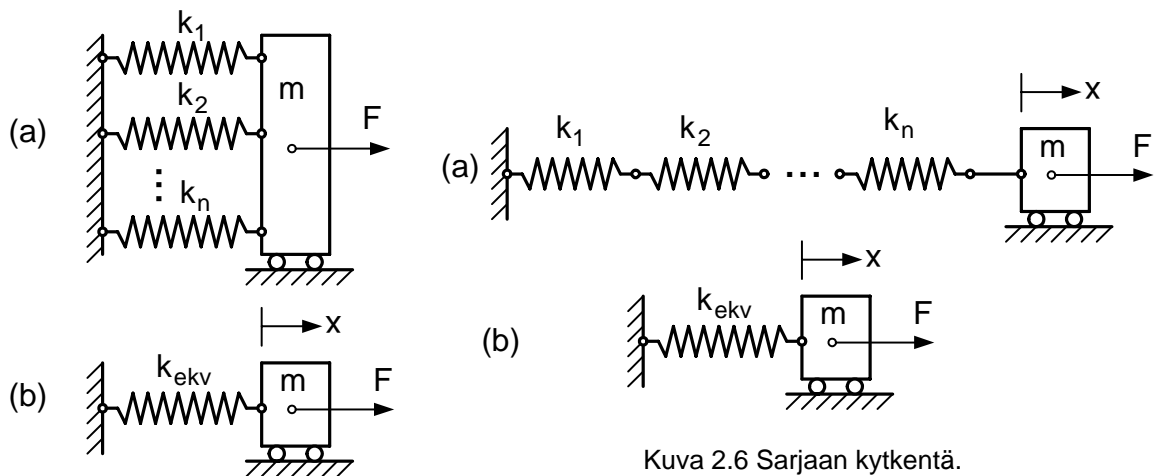
$$k_{\text{ekv}} = \sum_{i=1}^n k_i \quad (2.12)$$

Kuvassa 2.6 (a) pistemassa m on tuettu jousiyhdistelmällä, jossa on kytketty n kpl jousia sarjaan. Jokaisen jousen jousivoima on F , mutta jousien pituudenmuutokset eivät ole yhtä suuria, jos jousivakiot ovat erisuuria. Pituudenmuutosten summa on yhtä suuri kuin massan siirtymä x , joten

$$x = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \frac{F}{k_i} = F \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} = \frac{F}{k_{\text{ekv}}} \quad (2.13)$$

Tuloksesta (2.13) nähdään, että sarjaan kytkennän ekvivalentti jousivakio on

$$k_{\text{ekv}} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \right)^{-1} \quad (2.14)$$

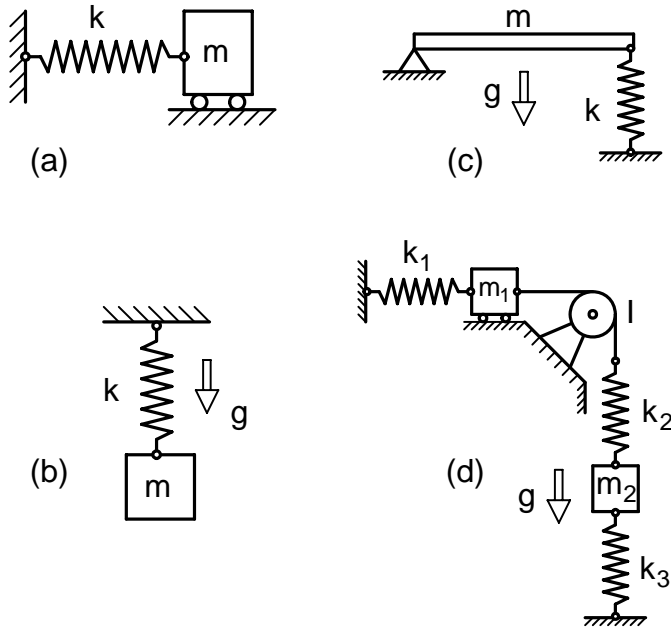


Kuva 2.6 Sarjaan kytkentä.

Kuva 2.5 Rinnankytkentä.

Koska yleinen jousiyhdistelmä saadaan käyttämällä sopivassa järjestyksessä rinnan- ja sarjaan kytkentöjä, voidaan mikä tahansa jousiyhdistelmä korvata kaavojen (2.12) ja (2.14) avulla yhdellä, massan m liikkeen kannalta ekvivalentilla jousella.

Mekaanisen systeemin staattinen tasapainoasema on tila, johon systeemi hakeutuu staattisten kuormitusten alaisena. Kuvassa 2.7 on systeemejä, joilla on yksikäsitteinen ja stabiili staattinen tasapainoasema. Eryistapauksissa staattisia tasapainoasemia voi olla useampiakin, mutta tällöin yksi niistä on stabiili ja muut labiileja tasapainoasemia. Riittämättömästi tuetulla systeemillä tarkoitetaan tilannetta, jossa systeemillä on jäykän kappaleen liikemahdollisuus. Tällöin tasapainoasemia ei välttämättä ole lainkaan tai niitä on äärettömän monta. Kuvan 2.7 (a) tapauksessa jousi



Kuva 2.7 Yksikäsitteinen staattinen tasapainoasema.

on staattisessa tasapainoasemassa lepopituudessa, mutta kuvan 2.7 (b) tilanteessa jousessa on painovoiman aiheuttama staattinen pituudenmuutos, joka on statiikan mukaan

$$\Delta_{st} = \frac{mg}{k} \quad (2.15)$$

Myös kuvan 2.7 tapauksissa (c) ja (d) jousilla on painovoimasta johtuvat staattiset pituudenmuutokset, jotka voidaan selvittää käyttämällä statiikan tasapainoehtoja.

Värähtely on liikettä staattisen tasapainoaseman suhteen ja jatkossa osoittautuu, että värähtelyamplitudit kannattaa mitata siitä lähtien. Tämä edellyttää staattisen tasapainoaseman tuntemista, mutta se voidaan määrittää statiikan avulla. Staattisia siirtymiä on myös helppo mitata. Mittaustuloksia voidaan käyttää mm. jousivakioiden määrittämiseen esimerkiksi kaavaa (2.15) käyttäen.

2.3 Inertia

2.3.1 Massa ja hitausmomentti

Mekaanisen systeemin inertiaominaisuudet vaikuttavat sen värähtelyihin. Inertiaominaisuudet ovat todellisuudessa jatkuvasti jakaantuneet systeemiin. Usein voidaan käyttää riittävällä tarkkuudella diskreettiä mallia, jossa esiintyy vain pistemäisiä massoja ja hitausmomenteja. Yhden vapausasteen värähtelyssä on tällöin kysymys joko pistemassan translaatiosta tai jäykän kappaleen rotaatiosta kiinteän akselin ympäri.

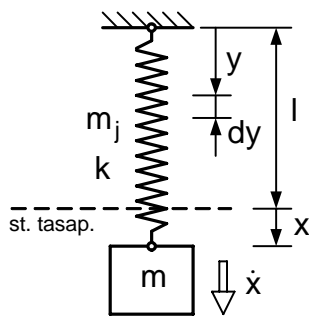
Partikkelilla on vain translaatioinertia eli massa, mutta jäykällä kappaleella on lisäksi rotaatioinertiaominaisuudet (kolme hitausmomenttia ja hitaustuloa mitattuna jossakin koordinaatistossa). Tasoliikkeessä olevan jäykän kappaleen rotaatioinertian hallitsemiseksi riittää tuntea sen hitausmomentti massakeskiön kautta kulkevan liiketason normaalin tai sen kanssa yhdensuuntaisen suoran suhteen. Säännöllisten geometristen kappaleiden hitausmomentit saadaan taulukoista. Mutkikkaammissa tapauksissa hitausmomentit voidaan määrittää likimääräisesti tietokoneohjelmilla tai mitata. Hitausmomentille pätee Steinerin siirtösääntö, joka tasoliikkeen tapauksessa on

$$I_O = I_G + mr_O^2 \quad (2.16)$$

jossa I_G on massakeskiön kautta kulkevan liiketason normaalin ja I_O sen kanssa yhdensuuntaisen suoran suhteen laskettu hitausmomentti ja m kappaleen massa ja r_O kyseisten suorien välinen etäisyys.

2.3.2 Jousen inertiaivaikutus

Mekaanisen systeemin joustavien osien inertia voidaan usein jättää huomioonottamatta, mutta aina tämä ei ole mahdollista. Jos joustavan osan inertia on huomattavasti pienempi kuin siihen liittyvän kappaleen, mutta ei merkityksetön analyysin tarkkuuden kannalta, voidaan käyttää ekvivalenttia inertiaa. Tämä tarkoittaa värähtelevän kappaleen inertian täydentämistä sopivalla määrällä niin, että joustavan osan inertia-vaikutus tulee otetuksi likimääräisesti huomioon.



Kuva 2.8 Lisämassa.

Tarkastellaan kuvan 2.8 jousi-massa-systeemiä, jossa jousen massa m_j ei ole pieni massaan m verrattuna. Systeemin liike-energia T sisältää massan m ja jousen massan m_j vaikutuksen ollen muotoa

$$T = T_j + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m_{\text{ekv}}\dot{x}^2 \quad (2.17)$$

jossa T_j on jousen liike-energia, x staattisesta tasapainoasemasta mitattu siirtymä ja m_{ekv} jousen massan huomioonottava ekvivalentti massa. Jousen liike-energian laskeksi oletetaan, että kohdalla y olevan jousielementin dy nopeus on $\dot{y} = (y/l)\dot{x}$ eli se vaihtelee lineaarisesti välillä $[0, \dot{x}]$. Jousielementin dy liike-energia on tällöin

$$dT_j = \frac{1}{2} \frac{m_j}{l} dy \left(\frac{y}{l} \right)^2 \dot{x}^2 \quad (2.18)$$

josta saadaan jousen liike-energia integroimalla muuttujan y suhteen

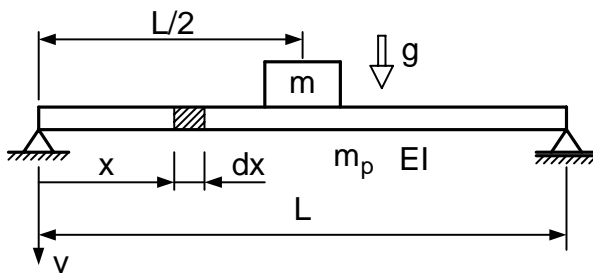
$$T_j = \frac{m_j \dot{x}^2}{2l^3} \int_0^l y^2 dy = \frac{1}{2} \left(\frac{m_j}{3} \right) \dot{x}^2 \quad (2.19)$$

Tuloksesta (2.19) nähdään, että systeemin ekvivalentti massa on

$$m_{\text{ekv}} = m + \frac{1}{3}m_j \quad (2.20)$$

eli lisämassaksi otetaan tässä tapauksessa kolmasosa jousen massasta.

Toisena esimerkkinä lisämassan määrittämisestä tarkastellaan kuvan 2.9 kaksitukista palkkia. Palkin massa on m_p ja taivutusjäykkyys EI . Palkin keskellä on pistemassa m , johon verrattuna m_p ei ole pieni. Systemiä tarkastellaan yhden vapausasteen mallilla valiten siirtymäkoordinaatiksi palkin keskikohdan taipuma v_k . Palkkia pidetään taivutusjousena, jonka jousivakio keskellä olevan pistevoiman suhteen on lujuusopin mukaan $k = 48E I/L^3$. Liike-energia T sisältää massan m ja palkin massan m_p vaikutuksen ja sen lauseke on



Kuva 2.9 Palkin lisämassa.

$$T = T_p + \frac{1}{2}m\dot{v}_k^2 \quad (2.21)$$

jossa T_p on palkin liike-energia. Sen laskemiseksi oletetaan, että palkin dynaaminen taipumaviiva on samanmuotoinen kuin staattinen taipumaviiva, joka on välillä $0 \leq x \leq L/2$

$$v(x) = v_k \left[3\frac{x}{L} - 4\left(\frac{x}{L}\right)^3 \right] \quad (2.22)$$

Kohdassa x olevan elementin dx liike-energia on tällöin

$$dT_p = \frac{1}{2} \frac{m_p}{L} dx \left[3\frac{x}{L} - 4\left(\frac{x}{L}\right)^3 \right]^2 \dot{v}_k^2 \quad (2.23)$$

josta saadaan palkin liike-energia integroimalla muuttujan x suhteen

$$T_p = \frac{m_p \dot{v}_k^2}{2L} \cdot 2 \int_0^{L/2} \left[3\frac{x}{L} - 4\left(\frac{x}{L}\right)^3 \right]^2 dx = \frac{1}{2} \left(\frac{17}{35} m_p \right) \dot{v}_k^2 \quad (2.24)$$

Tuloksesta (2.24) nähdään, että lisämassaksi tulee $\frac{17}{35} \cdot 100\% \approx 48,6\%$ palkin massasta. Samalla periaatteella voidaan ratkaista muidenkin tapausten lisämassoille arvot. Tässä käytetty menetelmä on likimääräinen, koska joustavien osien nopeuksien lausekkeet ovat likimääräisiä.

2.4 Vaimennin

Käytännössä vapaan värähtelijän amplitudi pienenee ajan kuluessa ja lähestyy lopulta nollaa. Tätä ilmiötä sanotaan vaimennukseksi. Vaimennuksen seurauksena systeemin mekaanista energiaa muuttuu lämpöenergiaksi tai kuluu äänen syntymiseen. Vaimennuksen analyttiseen tarkasteluun on kehitetty monia ns. vaimennusmalleja, kuten esimerkiksi viskoosi vaimennus, kitkavaimennus, hystereesivaimennus ja rakenteellinen vaimennus. Vaimennus on hankalasti hallittava ilmiö ja syntyy useamman osatekijän yhteisvaikutuksesta, mistä johtuen sen täydellinen selittäminen ei onnistu kovin yksinkertaisella mallilla. Vaimennuksen ollessa vähäistä voidaan se usein jättää huomioonottamatta, mutta yleisesti tämä ei ole mahdollista. Yleensä vaimennusmallina käytetään viskoosia vaimennusta, jos se kuvaa edes likimääräisesti systeemin todellista käyttäytymistä. Tämän vaimennusmallin käyttö johtaa lineaariseen teoriaan, jolloin liikeyhtälöiden analyttinen ratkaiseminen onnistuu parhaiten. Seuraavassa tarkastellaan viskoosin vaimennuksen lisäksi kitkavaimennusta, joka ei ole lineaarinen malli.

2.4.1 Viskoosi vaimennus

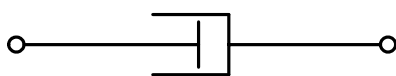
Mekaanisessa systeemissä on viskoosi vaimennus eli nestevaimennus, kun jokin systeemin komponentti on kosketuksessa nesteen kanssa. Vaimennus johtuu komponentin ja nesteen välisestä viskoosista kitkasta. Kun jäykkä kappale liikkuu nesteessä, on liikettä vastustava kitkavoima F tavallisissa olosuhteissa suoraan verrannollinen kappaleen nopeuteen $\dot{x} = v$, jolloin voidaan kirjoittaa

$$F = c\dot{x} = cv \quad (2.25)$$

jossa kerrointa c sanotaan vaimennusvakioiksi. Sen arvo riippuu kyseessä olevan nesteen viskositeetista ja siinä liikkuvan kappaleen geometriasta. Vakion c lauseke voidaan johtaa analyttisesti monille säännöllisen geometrian omaaville kappaleille.

Viskoosi vaimennus on usein systeemin käyttäytymisen kannalta. Vapaan värähtelyn amplitudi pienenee nopeasti, jos vaimennusta on edes hieman. Viskoosi vaimennus voi myös pienentää pakkovärähtelyn amplitudia.

Vaimennusvoima (2.25) aiheuttaa liikeyhtälöön lineaarisen termin, josta seuraa, että analyttinen ratkaisu on yksinkertainen. Tästä syystä viskoosin vaimennuksen mallia



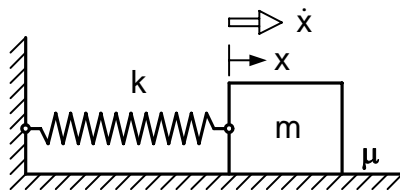
Kuva 2.10 Vaimennin.

käytetään myös tilanteissa, joissa ei esiinny nestekontaktia. Tällöin systeemin vaimennusta kuvataan ekvivalentilla viskoosilla vaimentimella lisäämällä laskentamalliin sopivalla vaimennusvakiolla varustettu iskunvaimenninelementti, jonka symboli on kuvassa 2.10. Näin voidaan ottaa huomioon esimerkiksi kumijousissa esiintyvä materiaalin sisäi-

nen vaimennus. Kuvan 2.10 vaimenninmallia voidaan käyttää myös rotaatioliikkeen, mutta silloin se aiheuttaa liikettä vastustavan kitkamomentin, joka on verrannollinen vaimentimeen kiinnitetyn kappaleen kulmanopeuteen.

2.4.2 Kitkavaimennus

Mekaanisessa systeemissä on kitkavaimennus, kun jokin systeemin komponentti on kosketuksessa kitkallisen pinnan kanssa. Kitkavaimennus syntyy massan liikuessa



Kuva 2.11 Kitkavaimennus.

pitkin kitkallista pintaa, akselin pyöriessä laakerissa, hihnakitkasta tai vierintävastuksesta. Kuvassa 2.11 on ensiksi mainittu tapaus. Kitkavaimennusta sanotaan vakiovoimennukseksi, koska vaimennusvoiman suuruus on riippumaton siirtymästä ja sen aikaderivaatasta riippuen vain kosketuspintojen välisestä normaalivoimasta. Kuvan 2.11 tilanteessa vaimennusvoiman suuruus on $F = \mu mg$, joka ei riipu siirtymästä x ja nopeudesta \dot{x} . Kitkavaimennus aiheuttaa liikeyhtälöön epälineaarisen

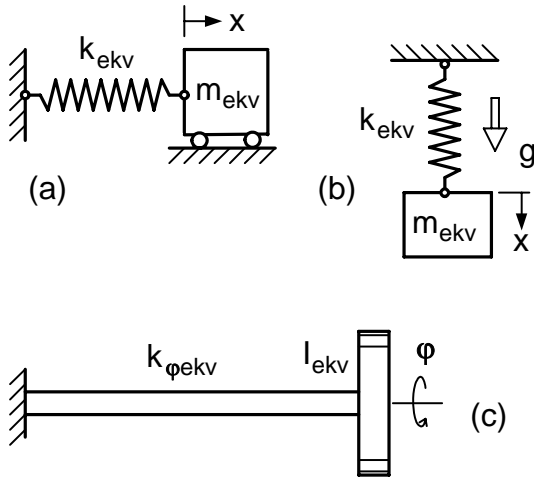
termin, koska vaimennusvoiman tai -momentin suunta riippuu liikesuunnasta ollen aina liikettä vastustava. Kuvan 2.11 tapauksessa vaimennusvoiman lauseke on

$$F = -\mu mg \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} \quad (2.26)$$

joka on selvästi epälineaarinen termi. Kitkavaimennuksen analyttinen tarkastelu onnistuu yhden vapausasteen systeemille vielä varsin helposti, ratkaisu on kuitenkin etsittävä paloittain puoli värähtelyjaksoa kerrallaan epälineaarisen vaimennusvoiman takia. Kitkavaimennusta sisältäviä usean vapausasteen systeemejä voidaan tarkastella yleensä vain numeerisesti tietokoneen avulla.

2.5 Ekvivalentti systeemi

Jokainen yhden vapausasteen systeemi, jossa ei ole vaimennusta, voidaan käsitellä jollakin kuvan 2.12 laskentamalleista. Näissä malleissa joustavilla osilla ei ole inertiaa vaan niiden inertia vaikutukset on otettu huomioon lisäämällä värähtelevän kappaleen inertiaa sopivalla määrällä, mikäli se on tarpeellista. Kuvassa 2.12 (a) oleva malli on sopiva, jos värähtely on translaatioliikettä ja joustavat osat ovat staattisessa tasapainoasemassa lepopituuksissaan. Kuvan 2.12 (b) malli taas kuvaa translaatioliikettä, jossa joustavassa osassa on pituudenmuutos staattisessa tasapainoasemassa. Rotaatioliikettä olevaan värähtelyyn voidaan käyttää kuvan 2.12 (c) laskentamallia. Kun staattinen tasapainoasema valitaan vertailukohdaksi, on kuvan 2.12 (a) systeemin potentiaalienergian lauseke



Kuva 2.12 Laskentamalleja.

$$V = \frac{1}{2} k_{\text{ekv}} x^2 \quad (2.27)$$

ja vastaavasti systeemin liike-energia on

$$T = \frac{1}{2} m_{\text{ekv}} \dot{x}^2 \quad (2.28)$$

Usean jäykän kappaleen muodostamaa systeemiä voidaan tarkastella yhden vapausasteen mallilla, jos kaikkien kappaleiden asema voidaan lausua saman koordinaatin avulla eli systeemistä voidaan muodostaa riittävä määrä geometrisia yhteyksiä kappaleiden liiketilojen välil-

le. Näitä yhteyksiä sanotaan kytkentäyhtälöiksi. Tällöin tarkasteltava vaimentamaton systeemi pystytään mallintamaan kuvan 2.12 mukaisesti ekvivalentilla systeemillä. Tämän toteamiseksi tarkastellaan aluksi tapausta, jossa potentiaalienergiaa esiintyy vain veto/puristusjousiin varastoituvan kimmoenergian muodossa ja systeemissä on vain pistemassojen translaatioliikettä. Olkoon x koordinaatti, joka ilmaisee systeemin kappaleiden aseman ja n jousien lukumäärä. Systeemin potentiaalienergia on tällöin

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_i x_i^2 \quad (2.29)$$

jossa k_i on jousen i jousivakio ja x_i sen pituudenmuutos. Koska kyseessä on yhden vapausasteen systeemi, voidaan pituudenmuutokset x_i lausua muodossa

$$x_i = \alpha_i x \quad (2.30)$$

jossa suureet α_i ovat systeemin geometriasta saatavia vakiota. Sijoittamalla tulos (2.30) kaavaan (2.29) saadaan potentiaalienergian lauseke muotoon

$$V = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n k_i \alpha_i^2 \right) x^2 \quad (2.31)$$

Kaavoista (2.27) ja (2.31) näkyy ekvivalentin systeemin jousivakion lauseke

$$k_{\text{ekv}} = \sum_{i=1}^n k_i \alpha_i^2 \quad (2.32)$$

Aivan samalla tavalla voidaan perustella systeemin liike-energialle lauseke

$$T = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^j m_i \beta_i^2 \right) \dot{x}^2 \quad (2.33)$$

jossa j on massojen lukumäärä, m_i kappaleen i massa ja suureet β_i systeemin geometriasta saatavia vakiota. Tällöin ekvivalentin systeemin massa on

$$m_{\text{ekv}} = \sum_{i=1}^j m_i \beta_i^2 \quad (2.34)$$

Jos systeemin potentiaalienergia on pelkästään vääntöjousien kimmoenergiaa ja kappaleiden liikkeet rotaatiota, systeemi voidaan mallintaa kuvan 2.12 (c) mukaisesti kirjoittamalla potentiaalienergia ja liike-energia muotoon

$$V = \frac{1}{2} k_{\phi\text{ekv}} \phi^2 \quad T = \frac{1}{2} I_{\text{ekv}} \dot{\phi}^2 \quad (2.35)$$

jossa ϕ on systeemin liikettä kuvaava kulmakoordinaatti, $k_{\phi\text{ekv}}$ ekvivalentin systeemin vääntöjousivakio ja I_{ekv} ekvivalentin systeemin hitausmomentti.

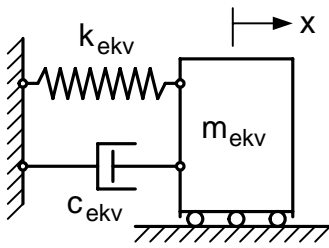
Ne tapaukset, joissa esiintyy samanaikaisesti kumpaakin liiketyyppeä, voidaan myös mallintaa kuvan 2.12 perusmalleilla kirjoittamalla systeemin potentiaalienergia ja liike-energia sopivasti valitun translaatio- tai rotaatiokoordinaatin avulla ja tulkitsemalla niiden lausekkeista ekvivalentin systeemin vakiot. Koordinaatin valinnasta riippuen päädytään joko tapaukseen 2.12 (a) tai (c).

Mekaanisessa systeemissä esiintyy usein painovoiman aiheuttamaa potentiaalienergiaa, jolloin jouset voivat sisältää pituudenmuutoksia staattisessa tasapainoasemassa. Näiden tapausten mallintamiseen sopii kuvan 2.12 (b) tapaus. Kun tasapainoasema valitaan vertailukohdaksi, on kuvan 2.12 (b) systeemin potentiaalienergian muutos siirryttäessä tasapainoasemasta $\Delta = m_{\text{ekv}} g / k_{\text{ekv}}$ mielivaltaiseen asemaan x

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} k_{\text{ekv}} (x + \Delta)^2 - m_{\text{ekv}} g x - \frac{1}{2} k_{\text{ekv}} \Delta^2 \\ &= \frac{1}{2} k_{\text{ekv}} x^2 + k_{\text{ekv}} x \frac{m_{\text{ekv}} g}{k_{\text{ekv}}} + \frac{1}{2} k_{\text{ekv}} \Delta^2 - m_{\text{ekv}} g x - \frac{1}{2} k_{\text{ekv}} \Delta^2 = \frac{1}{2} k_{\text{ekv}} x^2 \end{aligned} \quad (2.36)$$

joka on samaa muotoa kuin (2.27). Tuloksesta (2.36) näkyy, että painovoiman ja sen aiheuttaman staattisen pituudenmuutoksen vaikutukset kumoavat toisensa potentiaalienergian muutoksen lausekkeessa. Värähtelyanalyysissä siirtymät kannattaa mitata staattisesta tasapainoasemasta lähtien, koska tällöin kaikki esiintyvät kaavat ovat mahdollisimman yksinkertaista muotoa.

Jos vaimennus on mukana, on systeemi mallinnettava kuvan 2.13 ekvivalenttia systeemiä käyttäen. Ekvivalentti jousivakio ja massa/hitausmomentti saadaan energia-tarkasteluilla, kuten edellä esitettiin, mutta ekvivalentti vaimennusvakio on määritettävä työperiaatteella. Kun kuvan 2.13 systeemissä massa m_{ekv} liikkuu asemasta x_1 asemaan x_2 , tekee viskoosi vaimennusvoima $F = c \dot{x}$ systeemin kannalta negatiivisen työn



Kuva 2.13 Laskentamalli.

$$W_{1 \rightarrow 2} = - \int_{x_1}^{x_2} c_{ekv} \dot{x} dx \quad (2.36)$$

Tarkasteltavan systeemin viskoosien vaimennusvoimien tekemä kokonaistyö on siis kirjoitettava valitun koordinaatin x avulla muotoon (2.36), josta ekvivalentin systeemin vaimennusvakio c_{ekv} voidaan tunnistaa.