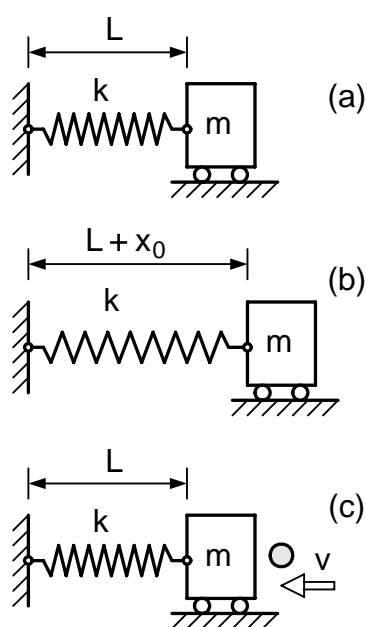


3 YHDEN VAPAUASSTEEN OMINAISVÄRÄHTELY

3.1 Johdanto

Ominaisvärähtely tarkoittaa mekaanisen systeemin liikettä, jossa se liikkuu omin päin ilman ulkoisten voimien vaikutusta. Ominaisvärähtely alkaa, jos systeemillä on alkuhetkellä mekaanista energiaa potentiaalienergian ja/tai liike-energian muodossa eli systeemi ei ole alkuhetkellä levossa staattisessa tasapainoasemassaan. Ominaisvärähtely on liikettä tasapainoaseman suhteen.

Tarkastellaan kuvan 3.1 (a) lineaarista jousi-massa systeemiä, jossa massa m liikkuu kitkattomalla tasolla. Kun massa siirretään tasapainoasemastaan oikealle kohtaan x_0 kuvan 3.1 (b) mukaisesti, varastoituu jousen potentiaalienergia $kx_0^2/2$ ja jousi vaikuttaa massaan vasemmalle suuntautuvalla voimalla kx_0 .



Kuva 3.1 Ominaisvärähtely.

Kun systeemi päästetään tästä asemasta ilman alkunopeutta liikkeelle, vetää jousivoima massaa kohti tasapainoasemaa, jolloin nopeuden lisääntyessä potentiaalienergiaa muuttuu liike-energiaksi. Kun systeemi saavuttaa tasapainoasemansa, on liike-energia suurimmillaan ja liike jatkuu tasapainoaseman vasemmalle puolelle. Tässä vaiheessa liike-energiaa muuttuu jousen potentiaalienergiaksi niin kauan kunnes jousi on puristunut määrän x_0 , jolloin nopeus on taas nolla. Tämä potentiaalienergian ja liike-energian välinen muuttumisprosessi jatkuu ikuisesti, jos systeemissä ei ole kitkaa. Todellisuudessa tällainen ikuisesti jatkuva liike on mahdoton, koska mekaanista energiaa muuttuu kitkavoimien tekemäksi työksi. Kuvan 3.1 (b) tilanteessa ominaisvärähtely alkaa, koska systeemillä on alkuhetkellä po-

otentiaalienergiaa tasapainoasemansa ulkopuolella. Kuvassa 3.1 (c) on esitetty tilanne, jossa jousi-massa-systeemi on levossa tasapainoasemassaan, kun siihen törmää nopeudella v vasemmalle liikkuva partikkeli. Törmäyksessä massa m saa liike-energiaa sekä alkunopeuden vasemmalle ja värähtelyliike alkaa, koska systeemi ei ole alkuhetkellä levossa tasapainoasemassaan.

Lineaarisen systeemin ominaisvärähtely on jaksollista liikettä ja värähtelyanalyysin kannalta on tärkeä tietää muun muassa, mikä on värähtelyn taajuus eli montako liikejaksoa systeemi suorittaa aikayksikössä. Tämä saadaan selville ratkaisemalla systeemin liikeyhtälö, jonka muodostamista tarkastellaan seuraavassa kohdassa. Kaikissa mekaanisissa systeemeissä esiintyy vaimennusta, jonka seurauksena ominaisvärähtelyliikkeen amplitudi pienenee nolaksi tietyn ajan kuluttua. Joskus vaimennus

on niin vähäistä, että sen vaikutusta ei kannata ottaa huomioon. Tällöin värähtelyn sanotaan olevan vaimenematon ja siis muussa tapauksessa vaimeneva. Jatkossa tarkastellaan ensiksi vaimenematonta ominaisvärähtelyä ja sen jälkeen vaimenevaa ominaisvärähtelyä viskoosin vaimennuksen ja kitkavaimennuksen mallin mukaisesti.

3.2 Liikkeyhtälö ja alkuehdot

Yhden vapausasteen systeemin ominaisvärähtelyn liikkeyhtälö on toisen kertaluvun tavallinen differentiaaliyhtälö, jossa aika on riippumaton muuttuja. Ajasta riippuva muuttuja on liikkeen kuvaamiseen käytetty koordinaatti, joka on jonkin systeemin partikkelin tai jäykän kappaleen translaatio- tai rotaatiosiihtymä.

Ominaisvärähtelyn liikkeyhtälö voi olla epälineaarinen, mikä saattaa johtua systeemin geometrian tai materiaalin epälineaarisuudesta tai epälineaarisista ulkoisista voima-vaikutuksista. Epälineaarisen systeemin liikkeyhtälössä voi esiintyä käytettävän koordinaatin ja sen aikaderivaattojen epälineaarisia termejä. Esimerkiksi kitkavaimennusmallin käyttö johtaa epälineaariseen liikkeyhtälöön.

Jos vaimennusmalliksi valitaan viskoosi vaimennus ja systeemi on muutenkin lineaarinen, on ominaisvärähtelyn liikkeyhtälö muotoa

$$m_{\text{ekv}} \ddot{x} + c_{\text{ekv}} \dot{x} + k_{\text{ekv}} x = 0 \quad (3.1)$$

Liikkeyhtälö (3.1) on toisen kertaluvun homogeeninen tavallinen differentiaaliyhtälö ja siinä on koordinaattina käytetty symbolia $x = x(t)$. Siirtymä x mitataan tavallisesti asemasta, jossa systeemi on staattisessa tasapainossa. Liikkeyhtälössä (3.1) on koordinaatin x toiseen aikaderivaattaan \ddot{x} (kiihtyvyys tai kulmakiihtyvyys) verrannollinen termi, joka kuvaa systeemin inertian vaikutusta liikkeeseen. Kun vaimennus on viskoosia, sisältää liikkeyhtälö koordinaatin ensimmäiseen aikaderivaattaan \dot{x} (nopeus tai kulmanopeus) verrannollisen vaimennustermin. Koordinaattiin x (asema tai kulma-asema) verrannollinen termi kuvaa systeemin joustavien osien vaikutusta.

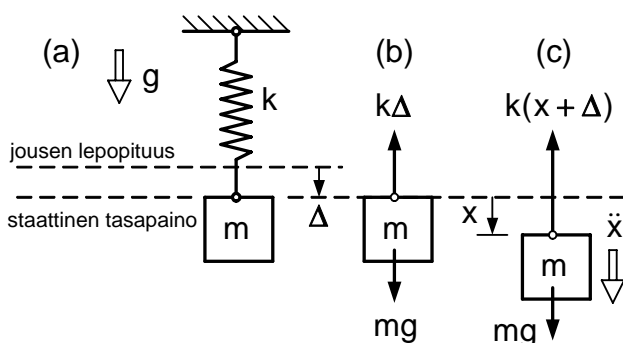
Liikkeyhtälö (3.1) voidaan kirjoittaa joko suoraan Newtonin lakeja käyttäen tai soveltamalla työ- ja energiaperiaatetta sekä ekvivalentin systeemin käsitettä.

Liikkeyhtälön (3.1) yleinen ratkaisu on kahden lineaarisesti riippumattoman yksityisratkaisun lineaarinen kombinaatio, jossa esiintyy kaksi määräämätöntä integroimisvakiota. Integroimisvakiot saadaan määritettyä, jos tunnetaan systeemin tila värähtelyn alkamishetkellä. Alkuhetkeen liittyviä koordinaatin ja sen aikaderivaattojen tunnettuja arvoja sanotaan alkuehdoiksi. Integroimisvakioiden määrittämiseen tarvitaan kaksi alkuehtoa. Liikkeyhtälön ratkaisun tyyppi on riippumaton alkuehdoista, mutta ne yksilöivät kyseeseen tulevan ratkaisun tyypillisten joukosta.

Käytännössä alkuehdot tarkoittavat systeemin kuvaamiseen käytetyn koordinaatin ja sen ensimmäisen aikaderivaatan alkuarvon tuntemista. Translaatioliikkeen tapauksessa tunnetaan siis asema ja nopeus alkuhetkellä ja rotaatioliikkeen tapauksessa vastaavasti kulma-asema ja kulmanopeus.

3.3 Vaimenematon ominaisvärähtely

Kuvassa 3.2 on yhden vapausasteen vaimenemattoman ominaisvärähtelyn perusmalli, jonka muodostaa runkoon jousella (jousivakio k) kiinnitetty pistemassa m .



Kuva 3.2 Perusmalli.

Systeemin kuvaamiseen käytetään tasapainoasemasta mitattua koordinaattia x . Kuvasta 3.2 (b) nähdään, että staattisesta tasapainosta seuraa

$$\uparrow k\Delta - mg = 0 \Rightarrow k\Delta = mg \quad (3.2)$$

Kuvasta 3.2 (c) saadaan soveltamalla Newtonin II lakia

$$\uparrow k(x + \Delta) - mg = -m\ddot{x} \quad (3.3)$$

josta saadaan kaavan (3.2) avulla systeemin liikeyhtälöksi

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (3.4)$$

Staattisen tasapainoaseman käytöstä vertailukohtana seuraa liikeyhtälölle (3.4) yksinkertainen muoto, jossa painovoiman vaikutus on eliminoitunut. Jakamalla liikeyhtälö (3.4) puolittain massalla m , se menee standardimuotoon

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (3.5)$$

jolloin on otettu käyttöön merkintä

$$\omega = \sqrt{k/m} \quad (3.6)$$

Liikeyhtälö (3.5) on harmonisen värähtelyliikkeen differentiaaliyhtälö. Suuretta ω sanotaan ominaiskulmataajuudeksi. Liikeyhtälön (3.5) yleinen ratkaisu on tunnetusti

$$x(t) = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t \quad (3.7)$$

jossa A_1 ja A_2 ovat alkuehdoista riippuvia vakioita. Kun systeemin alkuasema x_0 ja alkunopeus \dot{x}_0 tunnetaan, voidaan vakiot A_1 ja A_2 laskea. Nopeuden lausekkeeksi tulee derivoimalla

$$\dot{x}(t) = A_1 \omega \cos \omega t - A_2 \omega \sin \omega t \quad (3.8)$$

Alkuehdoista seuraa vakioille A_1 ja A_2 seuraava ratkaisu

$$x_0 = x(0) = A_2 \quad \dot{x}_0 = \dot{x}(0) = A_1 \omega \Rightarrow A_1 = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \quad A_2 = x_0 \quad (3.9)$$

Liikkeyhtälön ratkaisu $x(t)$ menee näin ollen muotoon

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t + x_0 \cos \omega t \quad (3.10)$$

Liikkeyhtälön (3.5) ratkaisu voidaan esittää myös vaihtoehtoisesti muodossa

$$x(t) = C \sin(\omega t + \psi) \quad (3.11)$$

jossa siirtymän maksimiarvoa C sanotaan värähdysliikkeen amplitudiksi ja kulmaa ψ vaihekulmaksi. Nopeuden lausekkeeksi tulee derivoimalla

$$\dot{x}(t) = C \omega \cos(\omega t + \psi) \quad (3.12)$$

Alkuehdoista seuraa vakioille C ja ψ seuraava ratkaisu

$$x_0 = x(0) = C \sin \psi \quad \dot{x}_0 = \dot{x}(0) = C \omega \cos \psi \Rightarrow$$

$$C = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2} \quad \psi = \arctan\left(\frac{x_0 \omega}{\dot{x}_0}\right) \quad (3.13)$$

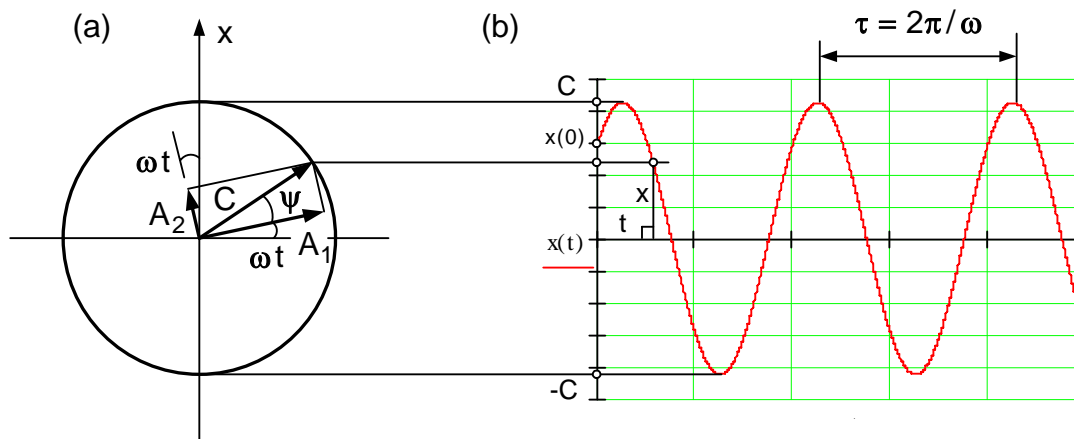
Liikkeyhtälön ratkaisuksi $x(t)$ tulee

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2} \sin\left[\omega t + \arctan\left(\frac{x_0 \omega}{\dot{x}_0}\right)\right] \quad (3.14)$$

Kaavoista (3.9) ja (3.13) näkyy, että vakioiden A_1 ja A_2 sekä C ja ψ välillä on yhteys

$$C = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \quad \psi = \arctan(A_2 / A_1) \quad (3.15)$$

Kun liikkeyhtälön (3.5) ratkaisu esitetään tx -koordinaatistossa, saadaan kuvan 3.3 (b) sinikäyrä. Tämän käyrän ordinaatat ovat tasaisella kulmanopeudella ω pyörivän C -pituisen vektorin pystyprojektiot kuvan 3.3 (a) mukaisesti. Kuvasta 3.3 (a) näkyy myös muiden vakioiden A_1 , A_2 ja ψ tulkinta.



Kuva 3.3 Harmoninen värähtely.

Aikaväliä, jonka kuluttua liike toistuu samanlaisena, kutsutaan ominaisvärähdysajaksi τ ja sen käänteisarvoa $f = 1/\tau$ ominaistaajuudeksi. Koska sinin jakso on 2π , seuraa kaavasta (3.11) yhteys $\omega\tau = 2\pi$, joten voidaan kirjoittaa seuraavat tulokset.

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad f = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.16)$$

Ominaiskulmataajuuden ω yksikkö on rad/s ja ominaistaajuuden f yksikkö $1/s = \text{Hz}$. Ottamalla huomioon kaava (3.2), voidaan ω , τ ja f kirjoittaa muotoon

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta}} \quad \tau = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta}{g}} \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\Delta}} \quad (3.17)$$

josta nähdään, että ominaistaajuus voidaan määrittää myös mittaamalla jousen staattinen pituudenmuutos.

On syytä huomata erityisesti, että suureet ω , τ ja f riippuvat vain systeemin massasta m ja jousivakiosta k ja ovat näin ollen systeemin sisäisiä ominaisuuksia, eivätkä riipu esimerkiksi ulkoisista kuormituksista.

Yllä olevat tulokset saatiin kuvan 3.2 mukaisen perusmallin translaatioliikkeen tarkastelusta. Saadut kaavat pätevät kuitenkin kaikille muillekin yhden vapausasteen systeemeille, vaikka liike olisi rotaatiota. Jousi on tällöin taivutus- tai vääntöjousi ja massan paikalle tulee hitausmomentti. Edelleen on selvää että teoria sopii kaikille yhden vapausasteen systeemeille, jotka voidaan korvata ekvivalentilla systeemillä edellisessä luvussa esitetyllä tavalla. Tällöin massan ja jousivakion paikalle tulee vastaava ekvivalentti suure.

3.4 Energiaperiaatteen käyttö

Vaimenemattomassa värähtelyssä systeemin mekaaninen energia säilyy eli systeemi on konservatiivinen. Tästä seuraa, että liikeyhtälö voidaan johtaa myös mekaanisen energian säilymisen periaatteella. Vaimenemattoman värähtelijän energia on osittain liike-energiaa ja osittain potentiaalienergiaa. Liike-energia varastoituu massaansa sen nopeuden seurauksena. Potentiaalienergia V varastoituu kimmoisiin osiin kimmoenergiaksi tai ilmenee voiman tekemänä työnä. Vaimenemattomassa värähtelyssä on voimassa

$$T + V = \text{vakio} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(T + V) = 0 \quad (3.18)$$

Johdetaan vielä kuvan 3.2 värähtelijän liikeyhtälö energiaperiaatteella. Kun jousen liike-energia oletetaan nolaksi, on ainoastaan massalla m liike-energiaa. Sen lauseke mielivaltaisella ajan hetkellä on

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad (3.19)$$

Valitaan staattinen tasapainoasema vertailukohtaksi potentiaalienergiaa laskettaessa eli potentiaalienergian arvot ilmaisevat muutoksen staattiseen tasapainoasemaan nähden. Kuvien 3.2 (b) ja (c) perusteella saadaan

$$V = V_c - V_b = \left[\frac{1}{2} k (x + \Delta)^2 - mgx \right] - \frac{1}{2} k \Delta^2 \quad (3.20)$$

josta seuraa yhteyden $k\Delta = mg$ avulla tulos

$$V = \frac{1}{2} k x^2 \quad (3.21)$$

Sijoittamalla T ja V kaavaan (3.18) saadaan

$$\frac{d}{dt}(T + V) = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} + kx = 0 \quad (3.22)$$

joka on sama liikeyhtälö kuin kaavassa (3.4) saatiin.

Jos ollaan kiinnostuneita vain ominaiskulmataajuudesta ω , voidaan se laskea lyhyesti Rayleigh'in energiaperiaatteella seuraavassa esitetyllä tavalla. Energian säilymisen periaatteesta seuraa, että kahdelle mielivaltaiselle ajan hetkelle pätee

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad (3.23)$$

Valitaan toiseksi hetkeksi systeemin staattinen tasapainoasema, jolloin voidaan so-

pia, että $V_1 = 0$. Toiseksi hetkeksi otetaan värähtelyn ääriasema, jossa massan nopeus on nolla ja $T_2 = 0$. Jos systeemin liike on harmonista värähtelyä, ovat T_1 ja V_2 liike- ja potentiaalienergian maksimiarvot. Näin saadaan tulokseksi Rayleigh'in energiaperiaate

$$T_{\max} = V_{\max} \quad (3.24)$$

josta ominaiskulmataajuus ω voidaan suoraan laskea.

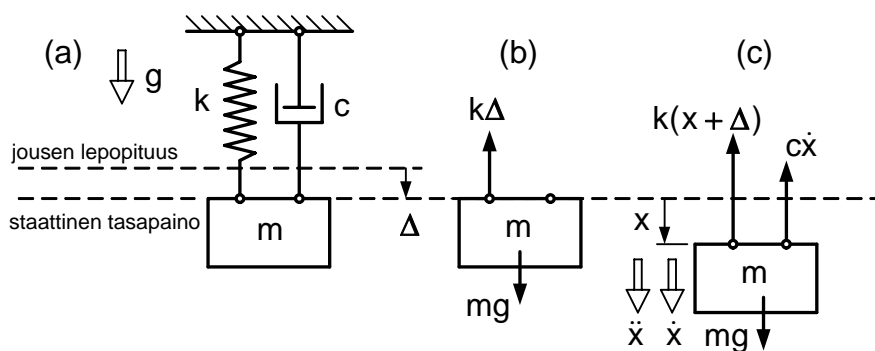
Sovelletaan kaavaa (3.24) kuvan 3.2 systeemiin. Kaavan (3.11) mukaan $x_{\max} = C$ ja kaavan (3.12) mukaan $\dot{x}_{\max} = C\omega$. Sijoitetaan nämä kaavaan (3.24), jolloin saadaan

$$T_{\max} = \frac{1}{2}mC^2\omega^2 = \frac{1}{2}kC^2 = V_{\max} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.25)$$

joka on sama tulos kuin kaavassa (3.4) määriteltiin.

3.5 Viskoosi vaimennus

3.5.1 Liikkeyhtälö ja sen ratkaiseminen



Kuva 3.4 Vaimennettu värähtelijä.

Viskoosissa vaimennuksessa vaimennusvoima on suoraan verrannollinen massan nopeuteen eli

$$F = c\dot{x} \quad (3.26)$$

jossa c on vaimennusvakio. Kuvassa (3.4) on viskoosisti

vaimennetun värähtelijän perusmalli. Vaimennus on kuvattu nestevaimentimella. Kuvasta 3.4 (b) seuraa tulos $k\Delta = mg$. Kuvasta 3.4 (c) saadaan liikkeyhtälö

$$\uparrow \quad k(x + \Delta) + c\dot{x} - mg = -m\ddot{x} \quad (3.27)$$

josta seuraa värähtelijän liikkeyhtälöksi

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (3.28)$$

Jakamalla puolittain massalla m , menee liikeyhtälö standardimuotoon

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (3.29)$$

jolloin on otettu käyttöön merkinnät

$$\omega = \sqrt{k/m} \quad \zeta = c/(2m\omega) \quad (3.30)$$

Suuretta ζ sanotaan vaimennussuhteeksi. Vaimennussuhde kuvaa vaimennuksen voimakkuutta ja se on dimensioton luku.

Etsitään liikeyhtälön (3.29) ratkaisua muodossa $x(t) = A e^{\lambda t}$, jossa A ja λ ovat vakioita. Tällöin on $\dot{x}(t) = A\lambda e^{\lambda t}$ ja $\ddot{x}(t) = A\lambda^2 e^{\lambda t}$. Sijoittamalla ratkaisuyrite liikeyhtälöön (3.29) saadaan

$$A e^{\lambda t} (\lambda^2 + 2\zeta\omega\lambda + \omega^2) = 0 \quad (3.31)$$

joka toteutuu kaikilla ajan t arvoilla vain, jos

$$\lambda^2 + 2\zeta\omega\lambda + \omega^2 = 0 \quad (3.32)$$

Yhtälöä (3.32) sanotaan karakteristiseksi yhtälöksi ja sen juuret ovat

$$\lambda_1 = \omega \left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \quad \lambda_2 = \omega \left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \quad (3.33)$$

Liikeyhtälön (3.29) yleinen ratkaisu on siis muotoa

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-\zeta\omega t} \left(A_1 e^{\sqrt{\zeta^2 - 1}\omega t} + A_2 e^{-\sqrt{\zeta^2 - 1}\omega t} \right) \quad (3.34)$$

jossa vakiot A_1 ja A_2 määräytyvät massan m alkuaseman x_0 ja alkunopeuden \dot{x}_0 perusteella. Koska vaimennusvakio ζ voi saada arvoja väliltä $0 \leq \zeta < \infty$, voi yllä neilöjuuressa oleva lauseke $\zeta^2 - 1$ olla positiivinen tai nolla tai negatiivinen ja liikeyhtälön ratkaisu on luonteeltaan erilainen kussakin tapauksessa.

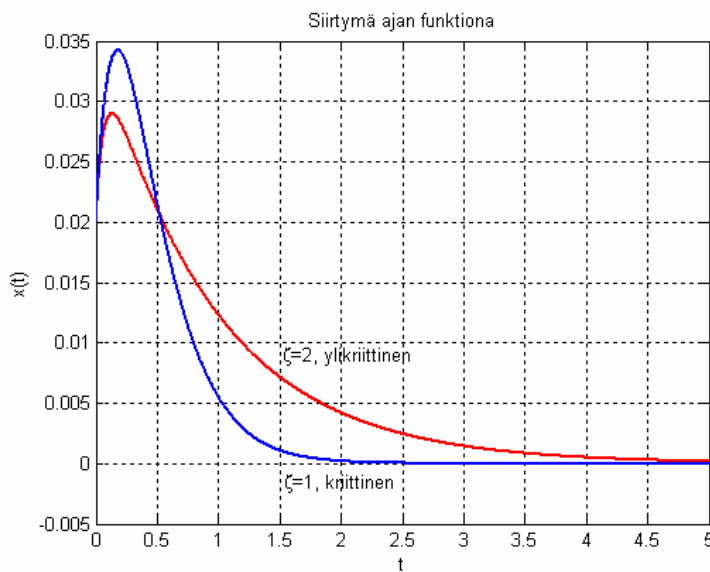
(a) Kun $\zeta > 1$ (ylikriittinen vaimennus), ovat juuret λ_1 ja λ_2 erisuuria negatiivisia reaalityyppisiä. Tällöin siirtymä x lähestyy asymptoottisesti nollaa, kun aika $t \rightarrow \infty$. Vaimennus on niin voimakas, että värähtelyä ei esiinny eikä syntyvä liike ole jaksollinen. Kun systeemin alkuasema x_0 ja alkunopeus \dot{x}_0 tunnetaan, voidaan laskea ratkaisussa (3.34) olevat vakiot A_1 ja A_2 . Voidaan osoittaa, että niiden lausekkeet ovat (todistus sivuutetaan)

$$A_1 = \frac{\dot{x}_0 + (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega x_0}{2\omega\sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad A_2 = \frac{-\dot{x}_0 + (-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega x_0}{2\omega\sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad (3.35)$$

(b) Kun $\zeta = 1$ (kriittinen vaimennus), ovat juuret λ_1 ja λ_2 yhtä suuria ja $\lambda_1 = \lambda_2 = -\omega$, joka on negatiivinen luku. Tyyppiä $Ae^{\lambda t}$ olevia ratkaisuja on vain yksi ja tarvitaan toinen siitä lineaarisesti riippumaton ratkaisu. Sellaiseksi kelpaa tyyppiä $Ate^{\lambda t}$ oleva ratkaisu. Liiketytälön yleiseksi ratkaisuksi tulee siis tässä tapauksessa

$$x(t) = A_1 e^{-\omega t} + A_2 t e^{-\omega t} \quad (3.36)$$

Myös kriittisen vaimennuksen tapauksessa vaimennus on niin voimakas, että siirtymä x lähestyy asymptoottisesti nollaa, kun aika $t \rightarrow \infty$. Kun systeemin alkuasema x_0 ja alkunopeus \dot{x}_0 tunnetaan, saadaan ratkaisussa (3.36) olevat vakiot A_1 ja A_2 kaavoista (todistus sivuutetaan)



Kuva 3.5 Kriittinen ja ylikriittinen vaimennus.

$$A_1 = x_0 \quad A_2 = \dot{x}_0 + \omega x_0 \quad (3.37)$$

Kun $\zeta = 1$, saadaan kaavasta (3.30) vaimennusvakiolle seuraava lauseke

$$c_k = 2m\omega = 2\sqrt{km} \quad (3.38)$$

jota sanotaan kriittiseksi vaimennusvakioksi. Voidaan osoittaa, että kriittisen vaimennuksen omaavan värähtelijän siirtymä lähestyy nopeammin nollaa kuin muuten vastaavan mutta ylikriittisen vaimennuksen omaavan vä-

rähtelijän. Kuvassa 3.5 on havainnollistettu tätä eräillä lukuarvoilla [$m = 1$ kg, $k = 16$ N/m, $c_1 = 8$ Ns/m, (kriittinen), $c_2 = 16$ Ns/m (ylikriittinen), $x_0 = 0,02$ m ja $\dot{x}_0 = 0,2$ m/s].

(c) Kun $\zeta < 1$ (alikiittinen vaimennus), on lauseke $\sqrt{\zeta^2 - 1}$ imaginäärinen ja se voidaan laittaa muotoon $i \cdot \sqrt{1 - \zeta^2}$, jossa $i = \sqrt{-1}$. Karakteristisen yhtälön juuret λ_1 ja λ_2 ovat tässä tapauksessa kompleksilukuja ja toistensa liittolukuja. Liiketytälön (3.29) yleinen ratkaisu on vastaavasti muotoa

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-\zeta \omega t} \left(A_1 e^{i\sqrt{1-\zeta^2} \omega t} + A_2 e^{-i\sqrt{1-\zeta^2} \omega t} \right) \quad (3.39)$$

Otetaan käyttöön merkinnät

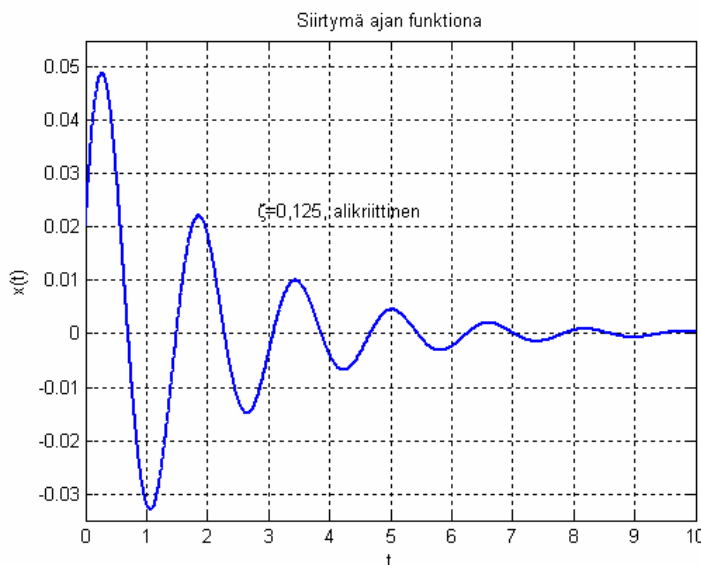
$$\omega_d = \omega \sqrt{1-\zeta^2} \quad \tau_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (3.40)$$

jossa suure ω_d on vaimennettu ominaiskulmataajuus ja τ_d vaimennettu ominaisvärähdysaika. Eulerin kaavan $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$ ja vaimennetun ominaiskulmataajuuden määritelmän perusteella saadaan ratkaisua (3.39) kehitettyä seuraavasti

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\zeta \omega t} \left[(A_1 \cos \omega_d t + i A_1 \sin \omega_d t) + (A_2 \cos \omega_d t - i A_2 \sin \omega_d t) \right] \\ &= e^{-\zeta \omega t} \left[(A_1 + A_2) \cos \omega_d t + i (A_1 - A_2) \sin \omega_d t \right] \end{aligned}$$

Kun edellä olevassa tuloksessa otetaan käyttöön uudet reaaliset vakiot $A_3 = A_1 + A_2$ ja $A_4 = i(A_1 - A_2)$, saadaan liikeyhtälön ratkaisu lopulliseen muotoonsa

$$x(t) = e^{-\zeta \omega t} (A_3 \cos \omega_d t + A_4 \sin \omega_d t) \quad (3.41)$$



Kuva 3.6 Alikriittinen vaimennus.

Ratkaisu (3.41) edustaa värähtelyä, jonka amplitudi pienenee kertoimen $e^{-\zeta \omega t}$ johdosta asympotoottisesti kohti nollaa, kun aika $t \rightarrow \infty$. Kuvassa 3.6 on havainnollistettu ratkaisua (3.41) arvoilla. [$m = 1 \text{ kg}$, $k = 16 \text{ N/m}$, $c = 1 \text{ Ns/m}$, (alikirittinen), $x_0 = 0,02 \text{ m}$ ja $\dot{x}_0 = 0,2 \text{ m/s}$].

Kun alkuehdot x_0 ja \dot{x}_0 tunnetaan, voidaan vakiot A_3 ja A_4 laskea kaavoista (todistus sivuutetaan)

$$A_3 = x_0 \quad A_4 = \frac{\dot{x}_0 + \zeta \omega x_0}{\omega \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (3.42)$$

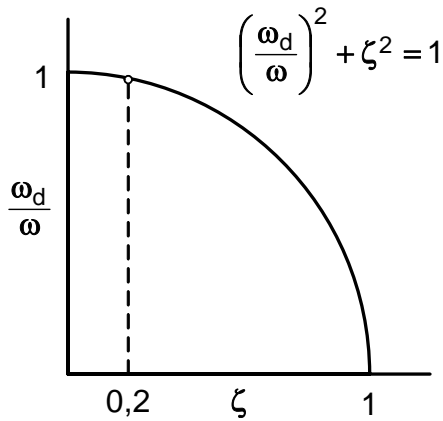
Ratkaisu (3.41) voidaan esittää myös toisessa muodossa, kun vakioina käytetään amplitudia C ja vaihekulmaa ψ

$$x(t) = C e^{-\zeta \omega t} \sin(\omega_d t + \psi) \quad (3.43)$$

Alkuehtojen ollessa x_0 ja \dot{x}_0 vakioiden C ja ψ lausekkeet ovat (todistus sivuutetaan)

$$C = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + \zeta \omega x_0}{\omega \sqrt{1 - \zeta^2}} \right)^2} \quad \psi = \arctan \left(\frac{x_0 \omega \sqrt{1 - \zeta^2}}{\dot{x}_0 + \zeta \omega x_0} \right) \quad (3.44)$$

Kaavasta (3.40) nähdään, että viskoosi vaimennus pienentää systeemin ominaiskulmataajuutta ja suurentaa ominaisvärähdysaika vaimenemattomaan tilanteeseen verrattuna. Kaava (3.40) voidaan kirjoittaa muotoon



Kuva 3.7 Vaimennettu ominaiskulmataajuus.

$$\left(\frac{\omega_d}{\omega} \right)^2 + \zeta^2 = 1 \quad (3.45)$$

joka on esitetty graafisesti kuvassa 3.7. Soveluksissa vaimennus on yleensä melko pieni, mutta ei merkityksetön. Vaimennussuhde ζ on harvoin suurempi kuin 0,2, ellei erityisesti pyritä suureen vaimennukseen. Kuvasta 3.9 näkyy, että tällä alueella ω_d ei poikkea paljon vaimenemattomasta ominaiskulmataajuudesta ω .

3.5.2 Logaritminen dekrementti

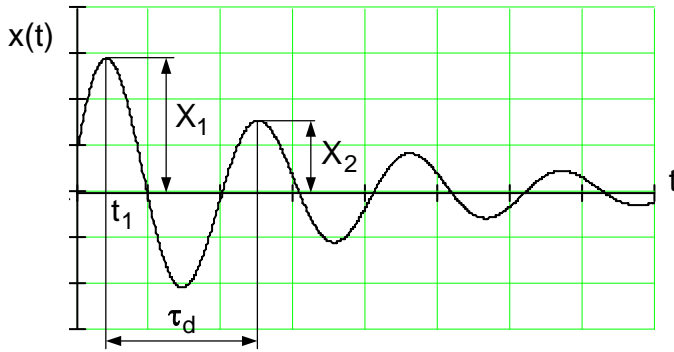
Vaimennussuhteen ζ suuruutta on usein vaikea arvioida tarkasti. Sitä voidaan tutkia myös kokeellisesti mittaamalla, kuinka nopeasti värähtelyn amplitudi pienenee. Tarkastellaan tätä ratkaisun (3.43) avulla, joka on esitetty graafisesti kuvassa 3.8. Logaritminen dekrementti on määritelmänsä mukaan luonnollinen logaritmi kahden peräkkäisen jakson amplitudien suhteesta. Määritelmästä ja ratkaisusta (3.43) seuraa logaritmiselle dekrementille δ kuvan 3.8 merkinnöin lauseke

$$\delta = \ln \frac{X_1}{X_2} = \ln \frac{e^{-\zeta \omega t_1} \sin(\omega_d t_1 + \psi)}{e^{-\zeta \omega (t_1 + \tau_d)} \sin[\omega_d (t_1 + \tau_d) + \psi]} \quad (3.46)$$

Koska $\omega_d \tau_d = 2\pi$, joka on sinifunktion jakso, sievenee kaava (3.46) muotoon

$$\delta = \ln \frac{X_1}{X_2} = \zeta \omega \tau_d = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (3.47)$$

Kun ζ on pieni, on $\sqrt{1-\zeta^2} \approx 1$ ja $\delta \approx 2\pi\zeta$. Kaavasta (3.47) voidaan ratkaista vaimennussuhteelle kaava



Kuva 3.8 Logaritminen dekrementti.

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} \quad (3.48)$$

Logaritmista dekrementtiä voidaan käyttää vaimennussuhteen ζ kokeellisessa määrittämisessä. Vaimennussuhde ζ saadaan kaavasta (3.48), kun δ on ensin määritetty kaavan (3.47) mittaus-tuloksista X_1 ja X_2 . Jos amplitudit X_1 ja X_2 poikkeavat hyvin vähän toisistaan, on kaavan

(3.47) käyttö epätarkkaa. Tällöin voidaan käyttää vaihtoehtoista kaavaa

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{X_1}{X_{n+1}} \quad (3.49)$$

jossa X_{n+1} on amplitudi, kun n värähtelyjaksoa on kulunut amplitudista X_1 .

3.6 Kitkavaimennus

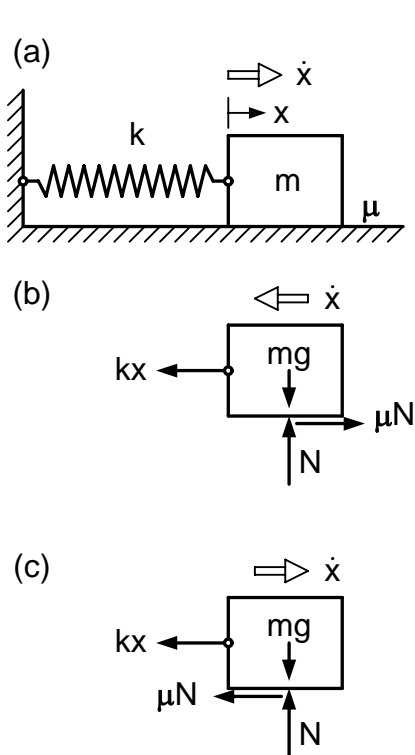
Toinen yleinen vaimennusmalli on kitkavaimennus. Kitkavaimennetun värähtelijän perusmalli on kuvassa 3.9. Kitkavaimennusta sanotaan vakiovaimennukseksi, koska vaimennusvoiman suuruus on riippumaton siirtymästä ja sen aikaderivaatasta ja riippuu vain liukupintojen välisestä normaalivoimasta. Kitkavoiman suunta on liikettä vastustava, joten voiman suunta muuttuu liikesuunnan muuttuessa. Massan liikkues-sa oikealta vasemmalle saadaan sen liikeyhtälöksi kuvan 3.9 (b) avulla

$$m\ddot{x} + kx - \mu N = 0 \quad (3.50)$$

Massan liikkuesssa vasemmalta oikealle liikeyhtälöksi tulee kuvan 3.9 (c) perusteella

$$m\ddot{x} + kx + \mu N = 0 \quad (3.51)$$

Yhtälön (3.50) yleinen ratkaisu on muotoa



Kuva 3.9 Kitkavaimennus.

$$x(t) = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t + \mu N/k \quad (3.52)$$

jossa $\omega^2 = k/m$ sekä A_1 ja B_1 alkuehdoista saatavia vakioita. Yhtälön (3.51) yleinen ratkaisu on

$$x(t) = A_2 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t - \mu N/k \quad (3.53)$$

jossa A_2 ja B_2 ovat alkuehdoista saatavia vakioita.

Ratkaisut (3.52) ja (3.53) ovat voimassa vuorotellen puolen värähdysjakson ajan. Vakiot A_1 ja B_1 (A_2 ja B_2) on määrättävä alkuehdoista aina uudelleen puolijakson alkaessa. Syntyvä liike on harmonista värähtelyä jokaisen puolijakson ajan. Värähtelyn tasapainoasema siirtyy puolijakson vaihtuessa määrällä $2\mu N/k$.

Tutkitaan kitkavaimennusta alkuehdoilla $x(0) = x_0 > 0$ ja $\dot{x}(0) = 0$ eli systeemi päästetään ääriasemastaan ilman alkunopeutta liikkeeseen.

Koska $x_0 > 0$, ratkaisu (3.52) on ensin voimassa. Kun vakiot A_1 ja B_1 lasketaan alkuehdoista, saadaan $A_1 = x_0 - \mu N/k$ ja $B_1 = 0$, joista seuraa

$$x(t) = (x_0 - \mu N/k) \cos \omega t + \mu N/k \quad 0 \leq t \leq \pi/\omega \quad (3.54)$$

Ratkaisu (3.54) on voimassa vain hetkeen $t_1 = \pi/\omega$ asti, jolloin nopeus on nolla ja massa vasemmalla ääriasemassa eli uudet alkuehdot ovat $x(t_1) = 2\mu N/k - x_0$ ja $\dot{x}(t_1) = 0$ sekä ratkaisu (3.53) on voimassa seuraavan puolijakson ajan. Ratkaisemalla vakiot A_2 ja B_2 edellä mainituista alkuehdoista saadaan $A_2 = x_0 - 3\mu N/k$ ja $B_2 = 0$, josta seuraa

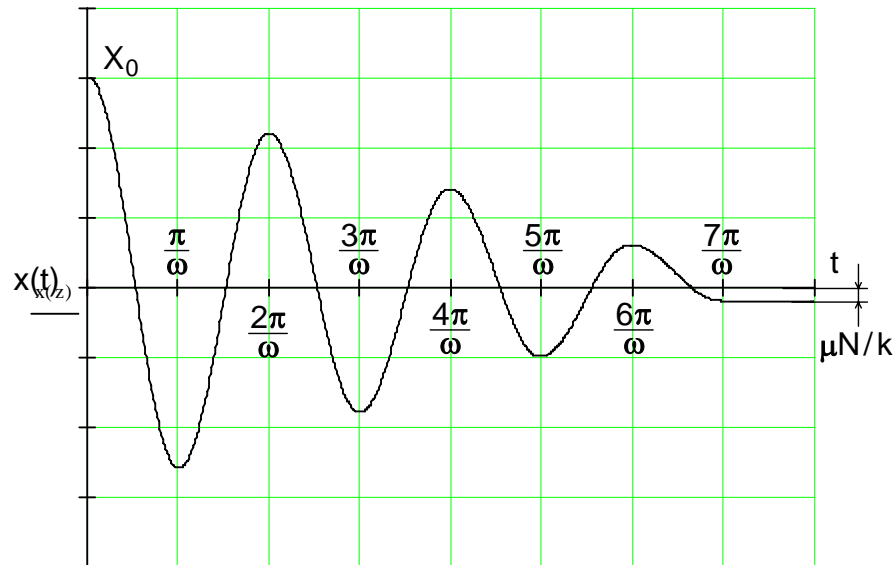
$$x(t) = (x_0 - 3\mu N/k) \cos \omega t - \mu N/k \quad \pi/\omega \leq t \leq 2\pi/\omega \quad (3.55)$$

Ratkaisu (3.55) on voimassa hetkeen $t_2 = 2\pi/\omega$ asti, jolloin massa on oikealla kohdassa $x(t_2) = x_0 - 4\mu N/k$ ja $\dot{x}(t_2) = 0$. Ratkaisu (3.52) on nyt voimassa ja alkuehdoista seuraa $A_1 = x_0 - 5\mu N/k$ ja $B_1 = 0$, jolloin

$$x(t) = (x_0 - 5\mu N/k) \cos \omega t + \mu N/k \quad 2\pi/\omega \leq t \leq 3\pi/\omega \quad (3.56)$$

Nähdään, että liikkeen amplitudi pienenee jokaisen jakson aikana määrällä $4\mu N/k$. Liike pysähtyy sen puolijakson aikana, jolla amplitudi on pienempi kuin $\mu N/k$, koska tällöin tasapainoon palauttava jousivoima on pienempi kuin kitkavoima μN . Kuvassa

3.10 on esitetty graafisesti kitkavaimennettu liike, jossa liike pysähtyy kolmen ja puolen värähtelyjakson jälkeen. Osa systeemin vaimennuksesta on aina kitkavaimennusta, koska ainoastaan se pysäyttää liikkeen. Nähdään myös, että kitkavaimennus ei muuta ominaistajuuutta.



Kuva 3.10 Kitkavaimennettu liike.