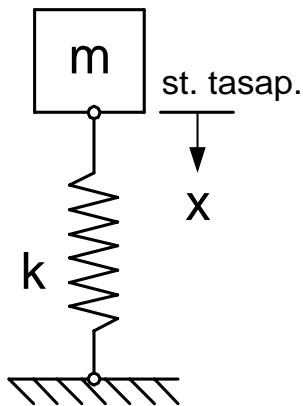


# YHDEN VAPAASTEEN VAIMENEMATON OMINAISVÄRÄHTELY



**Liikkeyhtälö:**

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

**Liikkeyhtälön ratkaisu:**

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t + x_0 \cos \omega t$$

$x_0$  alkuasema

$\dot{x}_0$  alkunopeus

$$x(t) = C \sin(\omega t + \varphi)$$

$$C = \sqrt{[\dot{x}_0 / \omega]^2 + [x_0]^2}$$

amplitudi

$$\varphi = \arctan[\omega x_0 / \dot{x}_0]$$

vaihekulma

**Perussuureet:**

$$\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{g/\Delta}$$

ominaiskulmataajuus (rad/s)

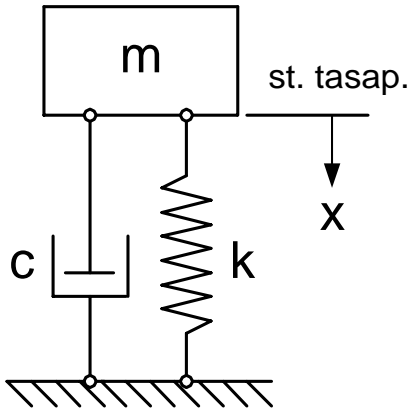
$$f = \omega / 2\pi$$

ominaistaajuus (1/s = Hz)

$$\tau = 1/f$$

ominaisvärähdysaika (s)

# YHDEN VAPAASTEEN VAIMENEVA OMINAISVÄRÄHTELY



**Liikkeyhtälö:**

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

Ominaiskulmataajuus:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Vaimennussuhde:

$$\zeta = c / 2m\omega$$

Kriittinen vaimennus

$$c_k = 2m\omega$$

**Liikkeyhtälön ratkaisu:**

1.  $\zeta > 1$  **yliekriittinen vaimennus** EI VÄRÄHTELYÄ

$$x(t) = e^{-\zeta\omega t} \left( A_1 e^{\sqrt{\zeta^2 - 1}\omega t} + A_2 e^{-\sqrt{\zeta^2 - 1}\omega t} \right)$$

$$A_1 = \frac{\dot{x}_0 + \left( \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \omega x_0}{2\omega\sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

$$A_2 = \frac{-\dot{x}_0 + \left( -\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \omega x_0}{2\omega\sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

2.  $\zeta = 1$  **kriittinen vaimennus** EI VÄRÄHTELYÄ

$$x(t) = A_1 e^{-\omega t} + A_2 t e^{-\omega t}$$

$$A_1 = x_0 \quad A_2 = \dot{x}_0 + \omega x_0$$

3.  $\zeta < 1$  alikriittinen vaimennus

## VAIMENEVA OMINAISVÄRÄHTELY

$$x(t) = e^{-\zeta\omega t} (A_3 \cos \omega_d t + A_4 \sin \omega_d t)$$

$$A_3 = x_0 \quad A_4 = \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega x_0}{\omega\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \omega_d = \omega\sqrt{1-\zeta^2}$$

TAI:

$$x(t) = C e^{-\zeta\omega t} \sin(\omega_d t + \psi)$$

Amplitudi:  $C = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega x_0}{\omega\sqrt{1-\zeta^2}}\right)^2}$

Vaihekulma:  $\psi = \arctan\left(\frac{x_0 \omega\sqrt{1-\zeta^2}}{\dot{x}_0 + \zeta\omega x_0}\right)$

Vaimennettu ominaiskulmataajuus:  $\omega_d = \omega\sqrt{1-\zeta^2}$   $\omega_d < \omega$

Vaimennettu ominaisvärähdysaika:  $\tau_d = 2\pi/\omega_d$   $\tau_d > \tau$

Logaritminen dekrementti  $\delta = \ln \frac{X_1}{X_2} = \frac{1}{n} \ln \frac{X_1}{X_{n+1}}$

$$\delta = \zeta\omega\tau_d = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\delta \approx 2\pi\zeta \quad \zeta \text{ pieni}$$