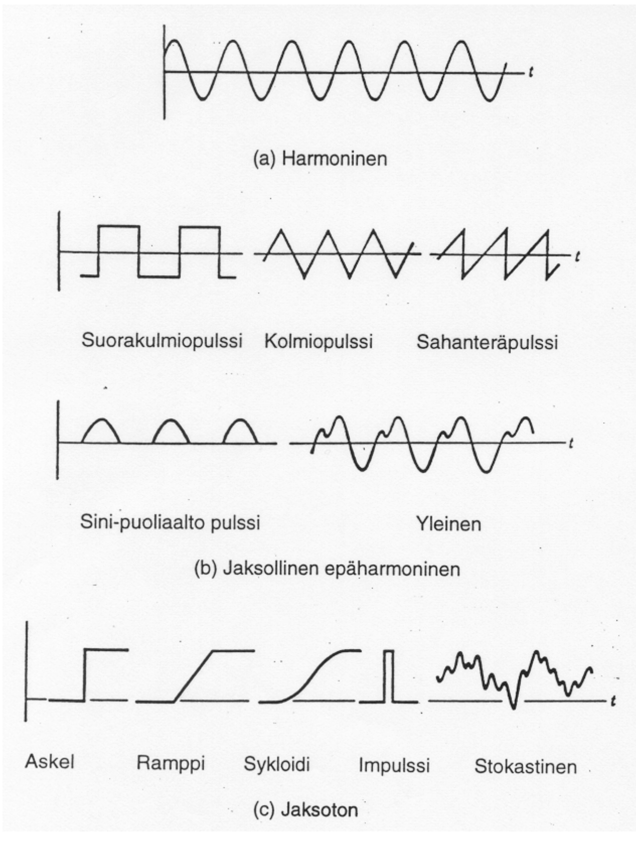
4 YHDEN VAPAUSASTEEN HARMONINEN PAKKOVÄRÄHTELY

4.1 Johdanto

Mekaanisen systeemin ulkoisista kuormituksista aiheutuvaa värähtelyä sanotaan pakkovärähtelyksi. Jos systeemissä on vaimennusta, on kyseessä vaimeneva pakkovärähtely, mutta muuten vaimenematon pakkovärähtely. Sitä osaa pakkovärähtelystä, joka häviää systeemistä lyhyen ajan kuluessa, sanotaan transientiksi. Transientin värähtelyn hävittyä jää jäljelle pysyvä värähtely.

Transienttia värähtelyä esiintyy iskukuormitusten, kappaleiden törmäysten ja liikkuvien kuormitusten yhteydessä. Syntyvä liike ei ole välttämättä jaksollista ja mahdolliset rakennevauriot johtuvat yleensä jonkin rakenneosan staattisen lujuuden ylityksestä.



Kuva 4.1 Herätefunktioita.

Pysyvä värähtely liittyy koneiden jatkuvaan käyttöön ja säilyy huomattavasti transienttia värähtelyä pitempiä aikoja. Syntyvät vauriot ovat väsymis- ja kulumisvaurioita.

Värähtelyanalyysissa sanotaan värähtelyn aiheuttajaa herätteeksi ja seurauksena olevaa systeemin liiketilaa (asema, nopeus, kiihtyvyys) vasteeksi. Tarkastelut voidaan jakaa osiin herätteen tyypin perusteella. Jos heräte on vailla mitään säännöllisyyttä, on kyseessä satunnaisheräte ja syntyvää liikettä sanotaan satunnaisvärähtelyksi eli stokastiseksi värähtelyksi. Jos heräte tunnetaan esimerkiksi ajan funktiona, se on deterministinen. Deterministinen heräte on jaksollinen, jos heräte toistuu säännöllisin välein samanlaisena. Erityisen tärkeä jaksollinen heräte on harmoninen heräte, jolloin kyseessä on sini- tai kosinimuotoinen herätevoiman vaihtelu. Kuvassa 4.1 on muutamia herätefunktioita, (a) on harmoninen heräte, kuvassa (b) on muita jaksollisia herätteitä ja kuvassa (c) jaksottomia herätteitä.
Tässä luvussa tarkastellaan yhden vapausasteen systeemin vastetta harmoniseen herätteeseen. Harmoniselle herätteelle on tyypillistä, että syntyvä pakkovärähtely tapahtuu samalla taajuudella kuin herätevoima vaihtelee. Tavallisia harmonisen he-

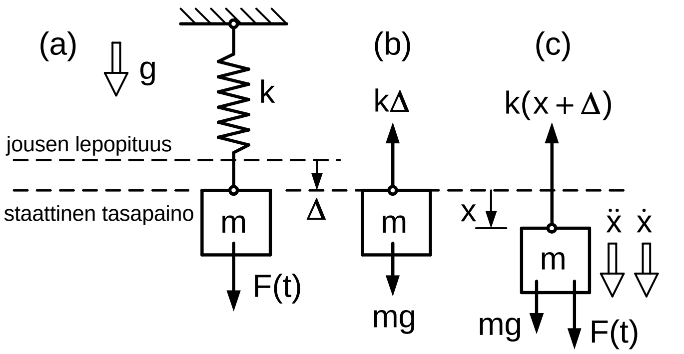
rätteen lähteitä ovat pyörivät ja edestakaisin liikkuvat koneenosat sekä itse koneen tai sen alustan liike. Syntyvät värähtelyt ovat yleensä koneen toiminnan kannalta haitallisia ja ainakin resonanssitilanne tulee useimmissa tapauksissa välttää. Tähän päästään värähtelyt huomioon ottavalla suunnittelulla sekä käyttämällä värähtelyn vaimennusta ja absorbointia.

Tarkkaan ottaen vaimenematonta pakkovärähtelyä ei käytännössä esiinny, mutta jos vaimennusvoimat ovat vähäisiä, kannattaa ne analyysin yksinkertaistamiseksi olettaa nolliksi. Seuraavassa tarkastellaan aluksi vaimenematonta harmonista pakkovärähtelyä, jolloin perusominaisuudet tulevat esille mahdollisimman yksinkertaisissa puitteissa ja tarkastelut voidaan sitten yleistää vaimenevaan värähtelyyn.

4.2 Vaimenematon harmoninen pakkovärähtely

4.2.1 Värähtelevä massa

Kuvassa 4.2 on lineaarisen yhden vapausasteen harmonisen pakkovärähtelijän perusmalli, jonka muodostavat jousi k, massa m ja siihen vaikuttava harmoninen pakkovoima $F(t) = F_0 \sin \Omega t$. Pakkovoiman lausekkeessa F_0 on sen amplitudi ja Ω kulmataajuus. Systeemin liikettä tutkitaan staattisesta tasapainoasemasta mitatun koordinaatin x avulla. Kuvan 4.2 (c) perusteella saadaan liikeyhtälö



Kuva 4.2 Pakkovärähtelyn perusmalli.

$$\uparrow \quad k(x+\Delta) - mg - F(t) = -m\ddot{x} \tag{4.1}$$

josta seuraa yhteyden $k\Delta = mg$ perusteella systeemin liikeyhtälöksi

$$\boxed{m\ddot{x} + kx = F(t) = F_0 \sin \Omega t} \tag{4.2}$$

Ottamalla huomioon systeemin ominaiskulmataajuuden määritelmä $\omega^2 = k/m$ menee liikeyhtälö (4.2) muotoon

$$\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \Omega t} \tag{4.3}$$

 © Matti Lähteenmäki

Liikeyhtälön (4.3) yleinen ratkaisu on muotoa $x = x_h + x_p$, jossa x_h on homogeenisen yhtälön $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ yleinen ratkaisu ja x_p täydellisen yhtälön (4.3) yksityisratkaisu. Kaavan (3.8) mukaan x_h on

$$x_h = A_1 \sin\omega t + A_2 \cos\omega t \tag{4.4}$$

jossa vakiot A_1 ja A_2 saadaan alkuehdoista. Yksityisratkaisu x_p on $x_p = X \sin\Omega t$, jossa X on vakio. Sijoittamalla yksityisratkaisu liikeyhtälöön (4.3) saadaan

$$-X\Omega^2 \sin\Omega t + X\omega^2 \sin\Omega t = \frac{F_0}{m}\sin\Omega t \quad \Rightarrow \quad X = \frac{F_0/m}{\omega^2 - \Omega^2} \tag{4.5}$$

josta seuraa yksityisratkaisulle kaava

$$\boxed{x_p = \frac{F_0/m}{\omega^2 - \Omega^2}\sin\Omega t \quad (\Omega \neq \omega)} \tag{4.6}$$

Liikeyhtälön (4.3) ratkaisu on siis

$$\boxed{x(t) = A_1 \sin\omega t + A_2 \cos\omega t + \frac{F_0/m}{\omega^2 - \Omega^2}\sin\Omega t \quad (\Omega \neq \omega)} \tag{4.7}$$

Kaava (4.6) ei ole voimassa, jos $\Omega = \omega$, jolloin toisaalta yksityisratkaisuyrite $x_p = X \sin\Omega t$ sisältyy jo homogeenisen yhtälön yleiseen ratkaisuun (4.3). Oikea yksityisratkaisu tapauksessa $\Omega = \omega$ on

$$\boxed{x_p = \frac{F_0\,\omega}{2k}\, t \sin\omega t \quad (\Omega = \omega)} \tag{4.8}$$

kuten helposti voidaan todeta sijoittamalla ratkaisu (4.8) liikeyhtälöön (4.3). Ratkaisussa (4.7) osa $x_h = A_1 \sin\omega t + A_2 \cos\omega t$ edustaa ominaisvärähtelyä, joka käytännössä vaimennuksen takia häviää systeemistä lyhyen ajan kuluessa. Pysyvää pakkovärähtelyä edustaa osa x_p, joka ei riipu systeemin alkuehdoista ja säilyy niin kauan, kun pakkovoima vaikuttaa. Kaavasta (4.6) näkyy, että pakkovärähtely tapahtuu samalla taajuudella kuin pakkovoima vaihtelee. Pakkovärähtelyn amplitudi X on

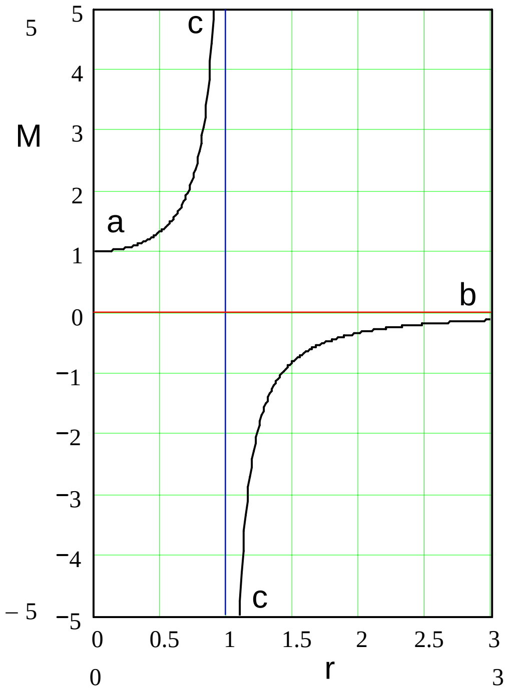
$$\boxed{X = \frac{F_0/m}{\omega^2 - \Omega^2}} \tag{4.9}$$

Kun otetaan huomioon yhteys $m = k/\omega^2$ ja merkitään $d = F_0/k$ ja $r = \Omega/\omega$, saa kaava (4.9) muodon

© Matti Lähteenmäki

$$\boxed{M = \frac{X}{d} = \frac{1}{1-r^2}} \tag{4.10}$$

Suure d on pakkovoiman amplitudin aiheuttama jousen staattinen pituudenmuutos. Suuretta r sanotaan taajuussuhteeksi ja suuretta M vahvistuskertoimeksi. M kertoo kuinka suuri värähtelyn amplitudi X on verrattuna pakkovoiman amplitudin F_0 aiheuttamaan staattiseen pituudenmuutokseen d. Kuvassa 4.3 vahvistuskerroin M on esitetty taajuussuhteen r funktiona. Kaavan (4.9) mukaan amplitudi $X > 0$, kun $\Omega < \omega$, jolloin pakkovoima ja värähtely ovat samassa vaiheessa. Vastaavasti amplitudi $X < 0$, kun $\Omega > \omega$. Koska on voimassa $X \sin\Omega t = -X \sin(\Omega t + \pi)$, voidaan päätellä, että pakkovoima ja värähtely ovat tällöin vastakkaisissa vaiheissa. Kuvan 4.3 käyrässä on kolme erityisen kiinnostavaa kohtaa, joita on merkitty a, b ja c. Kohdassa a on Ω hyvin pieni, ts. pakkovoima vaihtelee hyvin hitaasti ja massan m amplitudi X on lähellä staattista siirtymää d ($M \approx 1$). Kohdassa b on voimassa $\Omega >> \omega$, jolloin pakkovoima vaihtelee niin nopeasti, että massalla m ei ole aikaa seurata sen vaihtelua ja amplitudi X jää hyvin pieneksi ($M \approx 0$). Kiinnostavin ilmiö on kohdassa c, missä amplitudi X lähestyy ääretöntä, kun $\Omega \to \omega$. Tätä tilannetta sanotaan resonanssiksi. Jos pakkovoiman taajuus on yhtä suuri kuin ominaiskulmataajuus eli $\Omega = \omega$, on voimassa yksityisratkaisu (4.8), josta nähdään, että $x_p \to \infty$, kun $t \to \infty$.



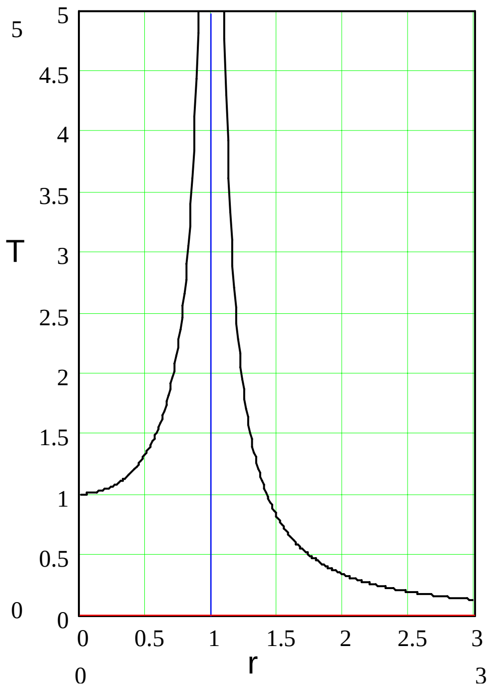
Kuva 4.3 Vahvistuskerroin.

Edellä esitetyn perusteella on selvää, että harmoninen pakkovoima aiheuttaa värähtelyongelmia, jos sen kulmataajuus on sama kuin systeemin ominaiskulmataajuus tai lähellä sitä. Käytännössä värähtelyn amplitudi ei voi tulla äärettömäksi, vaan systeemi vaurioituu aikaisemmin liiallisen värähtelyn seurauksena. Suunnittelijan tehtävänä on valita systeemin parametrit k ja m niin, että se toimii riittävällä etäisyydellä resonanssikohdastaan. Tätä kutsutaan systeemin virittämiseksi.

Pakkovärähtelyssä olevan massan kiinnitysalustaansa aiheuttamia voimavaikutuksia ei yleensä pystytä kokonaan välttämään, mutta niitä voidaan huomattavasti pienentää oikealla joustavien kiinnityselementtien valinnalla. Jos alustaan siirtyvän voiman maksimiarvo on pienempi kuin värähtelyn aiheuttaneen pakkovoiman amplitudi, sanotaan kiinnityselementtejä värähtelyn eristimiksi. Värähtelyn eristyksen tehtävänä on estää värähtelevän kappaleen aiheuttamien voimien siirtymistä ympäristöön tai estää värähtelevän ympäristön aiheuttamien voimien siirtymistä herkkiin laitteisiin.

Ongelma on siis molemmissa tapauksissa sama, siirtyvä voima on saatava mahdollisimman pieneksi. Konetekniikassa värähtelyn eristin on tavallisesti toteutettu teräksen ja kumin yhdistelmänä, jolloin jousto tapahtuu kumiosassa ja teräsosa mahdollistaa kiinnityksen koneeseen ja alustaan.

Kuvan 4.2 mallissa alustaan siirtyvän voiman maksimiarvo on $F_A = k\,X$, jolle voidaan kaavan (4.9) avulla kirjoittaa



Kuva 4.4 Siirtyvyys.

$$F_A = k\frac{F_0/m}{\omega^2-\Omega^2} = \frac{F_0}{1-r^2} \tag{4.11}$$

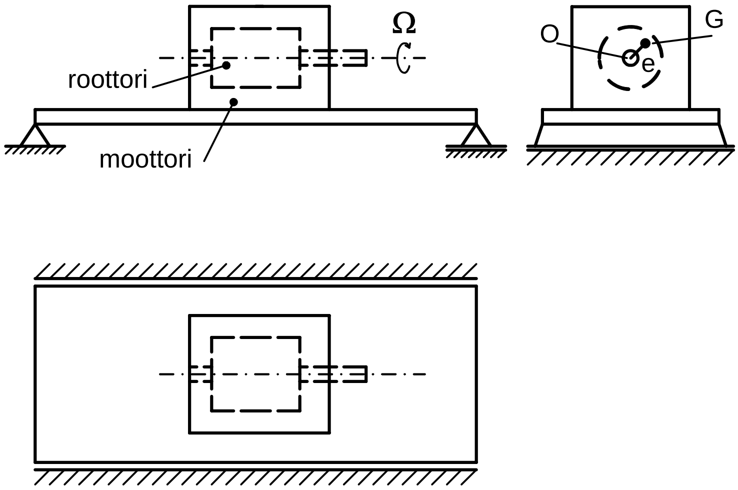
Värähtelyn siirtyvyys T määritellään seuraavasti

$$\boxed{T = \left|\frac{F_A}{F_0}\right| = \frac{1}{\left|1-r^2\right|}} \tag{4.12}$$

Siirtyvyys kertoo, kuinka suuri osa pakkovoimasta siirtyy jousen kautta alustaan. Kuvassa 4.4 on siirtyvyys T esitetty taajuussuhteen funktiona. Kuvaajasta nähdään, että $T<1$ vain, kun $r>\sqrt{2}$. Tällöin jousesta on hyötyä, koska se pienentää alustaan siirtyvän voiman maksimiarvoa, joka ilman jousta olisi F_0. Alueessa $r<\sqrt{2}$ on $T>1$ ja alustaan siirtyvän voiman maksimiarvo on suurempi kuin F_0 ja jousen käytöstä on vain haittaa. Edulliseen siirtyvyyteen päästään siis virittämällä systeemi niin, että se toimii kuvan 4.4 käyrällä ominaistaajuuttaan vastaavan kohdan oikealla puolella riittävän kaukana. Näin viritettyä systeemiä kutsutaan yliviritetyksi.

4.2.2 Tasapainottamaton roottori

Harmonisesti vaihteleva pakkovoima voi esiintyä pyörivien koneenosien yhteydessä. Tarkastellaan kuvan 4.5 tapausta, jossa sähkömoottori on sijoitettu kaksitukiselle palkille. Jos moottorin roottoria ei ole täydellisesti tasapainotettu, on sen massakeskiöllä G epäkeskeisyys e akselin keskipisteeseen O nähden. Tästä aiheutuu moottorin käydessä säteen suuntainen pyörivä hitausvoima $m_0\,e\,\Omega^2$, missä Ω on akselin kulmanopeus ja m_0 roottorin massa. Tämä voima välittyy laakereiden kautta moottorin runkoon ja siitä kiinnitysten kautta palkkiin. Hitausvoima $m_0\,e\,\Omega^2$ voidaan jakaa vaaka- ja pystykomponentteihinsa. Jos palkin vaakaliike on estetty, on kyseessä yh-



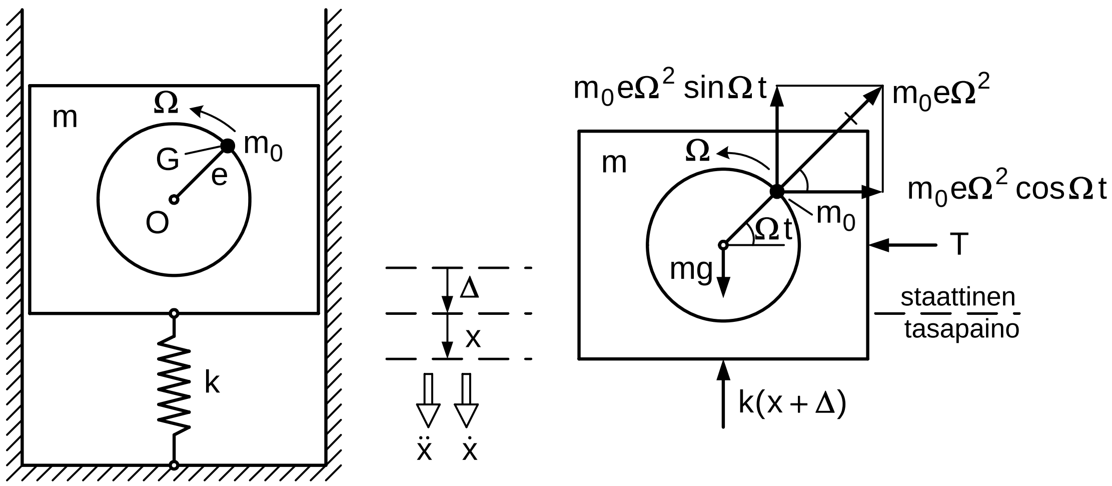
Kuva 4.5 Tasapainottamaton roottori.

den vapausasteen värähtely pystysuunnassa. Tilannetta voidaan tarkastella kuvan 4.6 laskentamallin avulla, jossa m on värähtelevän massan suuruus ja $k = 48EI/L$ on palkin jousivakio keskellä sitä vaikuttavan pistevoiman suhteen.

Kuvasta 4.6 saadaan systeemin liikeyhtälöksi pystysuunnassa

$$\uparrow \quad m\ddot{x} + kx = m_0 e \Omega^2 \sin\Omega t \tag{4.13}$$

joka on samaa muotoa kuin yhtälö (4.2). On kuitenkin huomattava, että yhtälön (4.13) oikealla puolella oleva pakkovoiman amplitudi riippuu kulmataajuudesta, mikä ilmeisesti vaikuttaa saatavan ratkaisun luonteeseen. Liikeyhtälön (4.11) yksityisratkaisu



Kuva 4.6 Tasapainottamattoman roottorin laskentamalli.

saadaan ilmeisesti kaavasta (4.6) sijoittamalla amplitudin F_0 paikalle lauseke $m_0 e\Omega^2$, jolloin saadaan ratkaisu

$$x_p = \frac{m_0 e \Omega^2}{m(\omega^2 - \Omega^2)} \sin\Omega t \quad (\Omega \neq \omega) \tag{4.14}$$

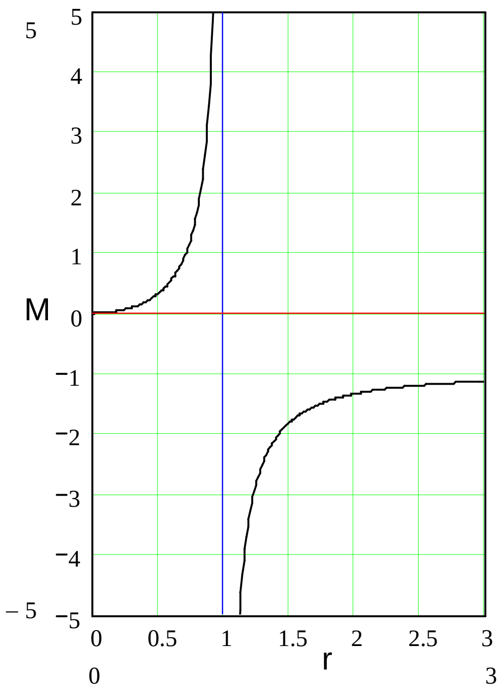
Pakkovärähtelyn amplitudi on siis tässä tapauksessa

$$\boxed{X = \frac{m_0 e \Omega^2}{m(\omega^2 - \Omega^2)}} \tag{4.15}$$

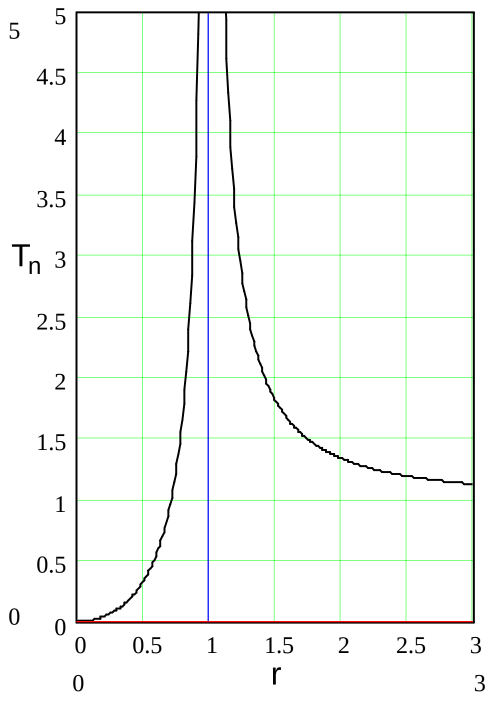
Dimensiotonta suuretta $M = mX/(m_0 e)$ sanotaan systeemin vahvistuskertoimeksi. Sen lauseke on selvästi

$$\boxed{M = \frac{mX}{m_0 e} = \frac{r^2}{1 - r^2}} \tag{4.16}$$

Kuvassa 4.7 on vahvistuskerroin M esitetty taajuussuhteen r funktiona. Pienillä pyörimisnopeuden Ω arvoilla $M \approx 0$ eli roottorin epätasapainon vaikutus on merkityksetön. Kun pyörimisen kulmataajuus $\Omega \to \omega$, amplitudi $X \to \infty$, mikä edustaa resonanssitilannetta. Suurilla kulmataajuuksilla $\Omega >> \omega$ on $M \approx -1$ ja amplitudi $X \to -(m_0 / m) e$. Tällä alueella on värähtelyn amplitudia siis mahdollista pienentää tekemällä koneen rungosta raskas esimerkiksi betonista tehtyjä painoja lisäämällä.



Kuva 4.7 Vahvistuskerroin.



Kuva 4.8 Siirtyvyys.

Tarkastellaan sitten pakkovoiman siirtyvyyttä alustaan kuvan 4.6 mallissa. Alustaan siirtyvän voiman maksimiarvoksi saadaan kaavan (4.15) perusteella

$$F_A = kX = \omega^2 \frac{m_0 e \Omega^2}{(\omega^2 - \Omega^2)} = F_n \frac{r^2}{1 - r^2} \tag{4.17}$$

jossa $F_n = m_0 e \omega^2$ on ominaiskulmataajuutta ω vastaava pakkovoiman amplitudi.

© Matti Lähteenmäki

Siirtyvyys $T_n = |F_A / F_n|$ on siis tässä tapauksessa

$$\boxed{T_n = \left|\frac{F_A}{F_n}\right| = \frac{r^2}{|1-r^2|}} \tag{4.18}$$

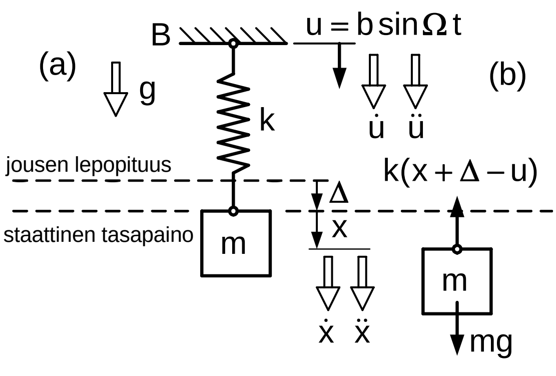
Kuvassa 4.8 on siirtyvyys T_n esitetty taajuussuhteen funktiona. Resonanssialueella alustaan siirtyvä voima on hyvin suuri. Suurilla pyörimisnopeuden arvoilla $T_n \to 1$ eli alustaan siirtyvän voiman arvo lähestyy arvoa F_n, joka on ominaiskulmataajuutta ω vastaava pakkovoiman amplitudi.

Alustaan siirtyvän maksimivoiman F_A lauseke voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$F_A = k\frac{m_0 e \Omega^2}{m(\omega^2 - \Omega^2)} = \frac{m_0 e \Omega^2}{1-(\Omega/\omega)^2} = \frac{F_{max}}{1-r^2} \tag{4.19}$$

jossa $F_{max} = m_0 e \Omega^2$ on kulmanopeutta Ω vastaavan pakkovoiman amplitudi. On selvää, että $|F_A / F_{max}| = T$, jossa T on kuvassa 4.4 esitetty siirtyvyys. Kuva 4.4 ei anna oikeaa yleiskuvaa siirtyvän voiman suuruudesta, koska F_{max} kasvaa kulmanopeuden kasvaessa, eli suure, johon alustaan siirtyvää voimaa verrataan, ei ole vakio. Kuvasta 4.4 syntyy helposti se väärä käsitys, että siirtyvä voima lähestyy nollaa kulmanopeuden Ω kasvaessa, mikä ei tietenkään pidä paikkaansa.

4.2.3 Värähtelevä alusta



Kuva 4.9 Värähtelevän alustan laskentamalli.

Tarkastellaan pakkovärähtelyä, joka aiheutuu kappaleen alustan liikkeestä. Tällaisen värähtelijän perusmalli on esitetty kuvassa 4.9. Malli sisältää jousen, massan ja liikkuvan alustan B. Jousi on kiinnitetty alustaan B, joka värähtelee harmonisesti funktion $u(t) = b\sin\Omega t$ mukaisesti. Liikettä kuvaa staattisesta tasapainoasemasta (Δ, $u = 0$) mitattu koordinaatti x, joka ilmaisee massan absoluuttisen aseman. Systeemin liikeyhtälöksi saadaan kuvasta 4.9 (b)

$$m\ddot{x} + kx = kb\sin\Omega t \tag{4.20}$$

Yhtälö (4.20) on samaa muotoa kuin yhtälö (4.2), mutta amplitudin F_0 paikalla on termi kb. Pakkovärähtelyn lauseke on kaavan (4.6) perusteella

$$\boxed{x_p = \frac{kb/m}{\omega^2 - \Omega^2}\sin\Omega t = \frac{b}{1-(\Omega/\omega)^2}\sin\Omega t \quad (\Omega \neq \omega)} \tag{4.21}$$

josta nähdään, että amplitudin X ja vahvistuskertoimen $M = X/b$ lausekkeet ovat

$$\boxed{X = \frac{b}{1-r^2} \qquad M = \frac{1}{1-r^2}} \tag{4.22}$$

Vahvistuskerroin on tässä tapauksessa sama kuin kaavan (4.10) vahvistuskerroin ja on siis esitetty kuvassa 4.3.

Massan m liikettä voidaan tutkia myös alustan suhteen käyttämällä suhteellista koordinaattia $z = x - u$. Sijoittamalla liikeyhtälöön (4.20) $\ddot{x} = \ddot{z} + \ddot{u}$ ja $x = z + u$ saadaan suhteellisen koordinaatin z avulla lausuttu liikeyhtälö

$$m\ddot{z} + kz = mb\Omega^2 \sin\Omega t \tag{4.23}$$

Yhtälö (4.23) on samaa muotoa kuin roottorin liikeyhtälö (4.13), termin $m_0 e\Omega^2$ paikalla on termi $mb\Omega^2$. Pakkovärähtelyn suhteellinen amplitudi Z ja vahvistuskerroin $M = Z/b$ ovat siis

$$\boxed{Z = \frac{b\Omega^2}{\omega^2 - \Omega^2} \qquad M = \frac{r^2}{1-r^2}} \tag{4.24}$$

Edellä oleva suhteellinen vahvistuskerroin on sama kuin roottoritapauksen kaavassa (4.16) ja on siis esitetty kuvassa 4.7.

Värähtelevän alustan tapauksessa ollaan kiinnostuneita alustasta massaan m siirtyvän voiman maksimiarvosta F_M, mikä on vapaakappalekuvan 4.9 (b) perusteella

$$F_M = k(X - b) = kZ = k\frac{b\Omega^2}{\omega^2 - \Omega^2} = kb\frac{r^2}{1-r^2} \tag{4.25}$$

jossa $F_K = kb$ on alustan maksimi siirtymää vastaava jousivoima. Nähdään, että siirtyvyys $T_n = |F_M / F_K|$ on

$$\boxed{T_n = \left|\frac{F_M}{F_K}\right| = \frac{r^2}{|1-r^2|}} \tag{4.26}$$

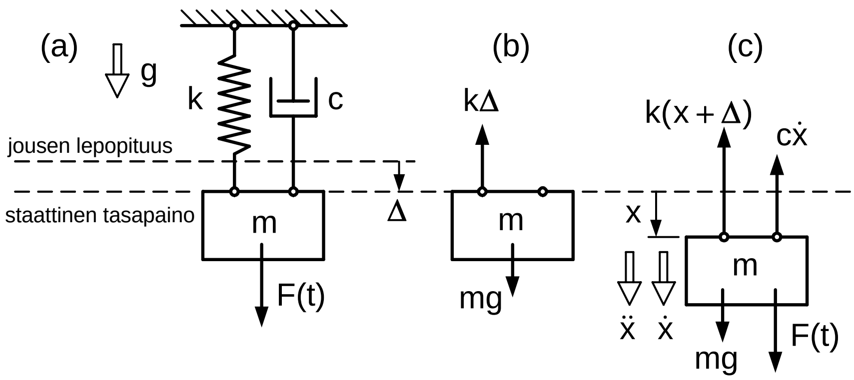
joka on sama lauseke kuin kaavassa (4.16) ja kuvassa 4.8 esitetty siirtyvyys. Koska $\omega^2 = k/m$, nähdään kaavasta (4.25), että jousivakion k pienentäminen pienentää yliviritetyn systeemin siirtyvyyttä.

© Matti Lähteenmäki

4.3 Viskoosisti vaimeneva harmoninen pakkovärähtely

4.3.1 Värähtelevä massa

Kuvassa 4.10 on viskoosisti vaimennetun yhden vapausasteen harmonisen pakkovärähtelijän perusmalli. Siihen kuuluu jousi k, massa m, vaimennin c ja massaan vaikuttava pakkovoima $F(t) = F_0 \sin\Omega t$. Kuvasta 4.10 (c) saadaan liikeyhtälö



Kuva 4.10 Viskoosisti vaimennettu värähtelijä.

$$\uparrow \quad k(x+\Delta) - mg + c\dot{x} - F(t) = -m\ddot{x} \tag{4.27}$$

Tästä seuraa edelleen

$$\boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) = F_0 \sin\Omega t} \tag{4.28}$$

Ottamalla huomioon ominaiskulmataajuuden ω ja vaimennussuhteen ζ määritelmät saadaan yhtälö (4.28) kirjoitettua standardimuotoon

$$\boxed{\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m}\sin\Omega t} \tag{4.29}$$

Yhtälön (4.29) yleinen ratkaisu on muotoa $x = x_h + x_p$, jossa x_h on homogeenisen yhtälön $\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2 x = 0$ yleinen ratkaisu ja x_p täydellisen yhtälön (4.29) yksityisratkaisu. Ratkaisun osa x_h on kaavan (3.43) mukaan alikriittiselle vaimennukselle

$$x_h = C e^{-\zeta\omega t} \sin(\omega_d t + \psi) \tag{4.30}$$

x_h edustaa ominaisvärähtelyä, joka häviää vaimennuksen ansiosta nopeasti. Pakkovärähtelyä edustaa yksityisratkaisu x_p, joten vain sen tarkastelu on tässä aiheellista. Yksityisratkaisu voidaan tässä tapauksessa löytää yritefunktioilla

$$x_p = A_1 \sin\Omega t + A_2 \cos\Omega t \qquad \text{tai} \qquad x_p = X\sin(\Omega t - \phi) \tag{4.31}$$

jossa A_1 ja A_2 sekä X ja ϕ ovat vakioita. Yritteistä jälkimmäinen on hieman kätevämpi, joten käytetään sitä. Vakiot X ja ϕ voidaan määrittää sijoittamalla yrite x_p liikeyhtälöön (4.29). Nopeudelle ja kiihtyvyydelle tulee derivoimalla lausekkeet

$$\dot{x}_p = \Omega X\cos(\Omega t - \phi) \qquad \ddot{x}_p = -\Omega^2 X\sin(\Omega t - \phi) \tag{4.32}$$

joten sijoitus liikeyhtälöön (4.29) antaa aluksi

$$-(\Omega^2 - \omega^2)X\sin(\Omega t - \phi) + 2\zeta\omega\Omega X\cos(\Omega t - \phi) = \frac{F_0}{m}\sin\Omega t \tag{4.33}$$

Käyttämällä kaavassa (4.33) sinin ja kosinin vähennyslaskukaavoja saadaan

$$\begin{aligned} -(\Omega^2 - \omega^2)X(\sin\Omega t\cos\phi - \cos\Omega t\sin\phi) + \\ + 2\zeta\omega\Omega X(\cos\Omega t\cos\phi + \sin\Omega t\sin\phi) = \frac{F_0}{m}\sin\Omega t \end{aligned} \tag{4.34}$$

Merkitsemällä yhtälön (4.34) eri puolilla esiintyvien termien $\sin\Omega t$ ja $\cos\Omega t$ kertoimet puolittain samoiksi saadaan yhtälöpari

$$(\omega^2 - \Omega^2)X\cos\phi + 2\zeta\omega\Omega X\sin\phi = \frac{F_0}{m} \qquad (\omega^2 - \Omega^2)X\sin\phi - 2\zeta\omega\Omega X\cos\phi = 0 \tag{4.35}$$

josta saadaan ratkaistua yksityisratkaisussa x_p olevat vakiot X ja ϕ. Tulos on (todistus sivuutetaan)

$$X = \frac{F_0/k}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(2\zeta\dfrac{\Omega}{\omega}\right)^2}} \qquad \phi = \arctan\left(\frac{2\zeta\dfrac{\Omega}{\omega}}{1 - \dfrac{\Omega^2}{\omega^2}}\right) \tag{4.36}$$

Vakiot X ja ϕ ovat pakkovärähtelyn $x_p = X\sin(\Omega t - \phi)$ amplitudi ja vaihekulma. Kun merkitään jälleen $d = F_0/k$ ja $r = \Omega/\omega$, saadaan vahvistuskertoimelle M ja vaihekulmalle ϕ kaavat

$$M = \frac{X}{d} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - r^2\right)^2 + \left(2\zeta r\right)^2}} \qquad \phi = \arctan\left(\frac{2\zeta r}{1 - r^2}\right) \tag{4.37}$$

Liikeyhtälön (4.29) ratkaisu on edellä olevan perusteella alikriittiselle vaimennukselle

$$\boxed{x(t) = C\,e^{-\zeta\omega t}\sin(\omega_d t + \psi) + X\sin(\Omega t - \phi)} \tag{4.38}$$

jossa vakiot X ja ϕ saadaan kaavasta (4.36). Vakiot C ja ψ määräytyvät pakkovärähtelijän alkuehdoista (alkuasema ja -nopeus), mutta eivät ole kaavan (3.44) mukaiset, sillä yksityisratkaisu x_p vaikuttaa myös niiden arvoihin.

Kuvassa 4.11 on kaavan (4.37) vahvistuskertoimen M ja vaihekulman ϕ kuvaajia taajuussuhteen r funktiona muutamilla vaimennussuhteen ζ arvoilla. Vahvistuskertoimen M käyrästöstä nähdään, että kaikki käyrät ovat nollavaimennusta vastaavan käyrän alapuolella. Vaimennus pienentää pakkovärähtelyn amplitudia ja erityisesti resonanssin läheisyydessä pieneneminen on voimakasta. Nähdään, että käyrien maksimit eivät ole kohdassa $\Omega = \omega$, eivätkä kohdassa $\Omega = \omega_d = \omega\sqrt{1-\zeta^2}$, vaan hieman tämän vasemmalla puolella kohdassa $\Omega = \omega_r = \omega\sqrt{1-2\zeta^2}$, kuten kaavasta (4.37) voidaan todeta etsimällä vahvistuskertoimen M derivaatan nollakohta. Arvoa ω_r sanotaan resonanssikulmataajuudeksi. Vaimenevalla värähtelyllä ovat ominaiskulmataajuus ω, vaimennettu ominaiskulmataajuus ω_d ja resonanssikulmataajuus ω_r erisuuria. Jos vaimennussuhde ζ on pieni, ovat ne kuitenkin hyvin lähellä toisiaan ja rajatapauksessa $\zeta = 0$ ne ovat samat. Maksimiamplitudiksi kohdassa $\Omega = \omega_r$ tulee

$$\boxed{X_{max} = \frac{F_0/k}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}} \tag{4.39}$$

joka on lähes sama kuin ominaiskulmataajuutta ω vastaava amplitudi, joka on

$$X_\omega = \frac{F_0/k}{2\zeta} \tag{4.40}$$

Usein ominaiskulmataajuutta ω sanotaan resonanssikulmataajuudeksi, koska ero on käytännössä pieni. Vaihekulman ϕ käyrästöstä nähdään, että vaimenemattomassa tapauksessa $\zeta = 0$ vaihekulma $\phi = 0^o$ resonanssin alapuolella ja $\phi = 180^o$ resonanssin yläpuolella, jolloin voima ja siirtymä ovat vastaavasti samassa tai vastakkaisessa vaiheessa. Kun $\Omega = \omega$, on $\phi = 90^o$ riippumatta vaimennussuhteen ζ arvosta.

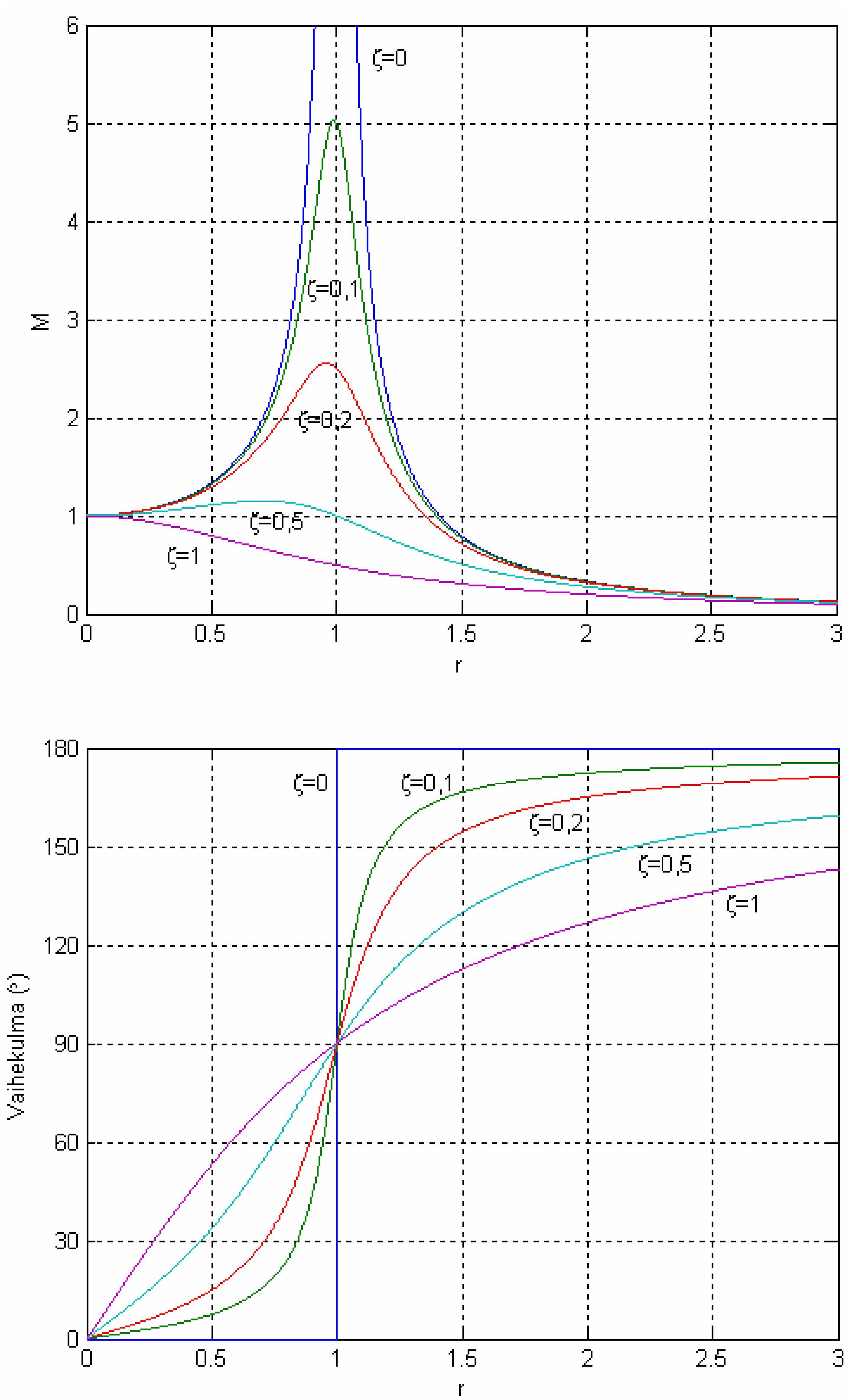
Tarkastellaan voimaa, joka kuvan 4.10 laskentamallissa siirtyy värähtelyn aikana alustaan pakkovoiman vaikutuksesta. Tämän voiman lauseke on kuvan 4.10 (c) ja kaavojen (4.31) ja (4.32) perusteella

$$F_a(t) = k\,x_p + c\,\dot{x}_p = k\,X\sin(\Omega t - \phi) + c\,\Omega\,X\cos(\Omega t - \phi) \tag{4.41}$$

Voidaan helposti osoittaa, että voiman $F_a(t)$ suurin arvo on

$$F_A = \sqrt{(k\,X)^2 + (c\,\Omega\,X)^2} = k\,X\sqrt{1+(2\zeta\Omega/\omega)^2} \tag{4.42}$$

jossa amplitudi X saadaan kaavasta (4.36). Nähdään, että pakkovärähtelyn siirtyvyy-

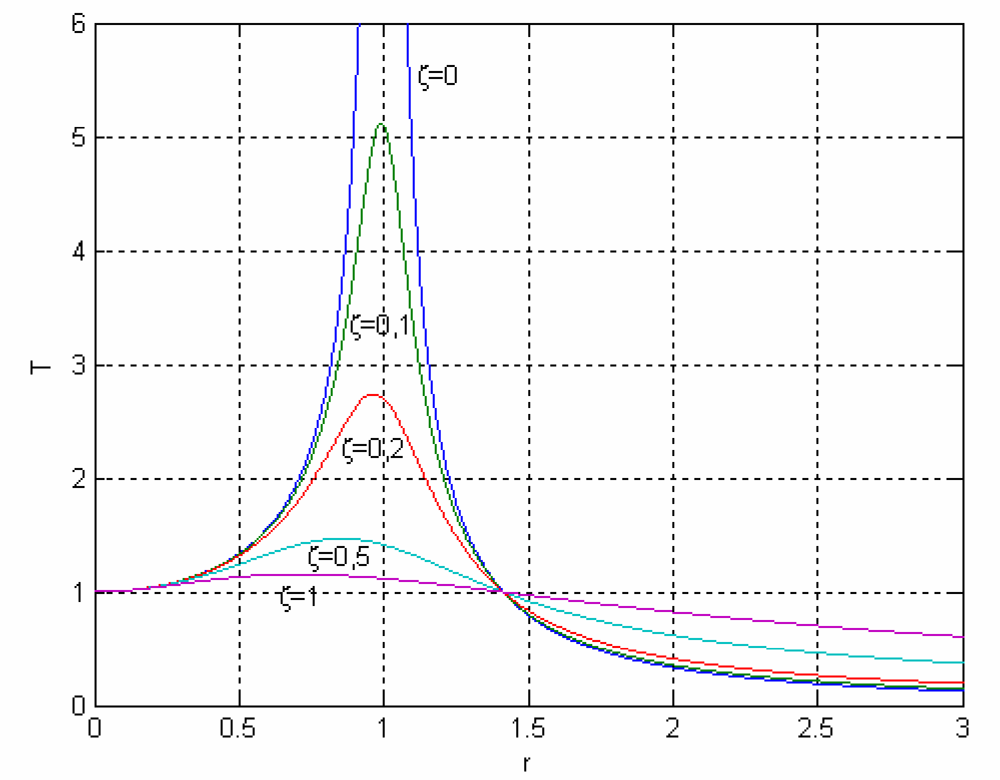


Kuva 4.11 Vahvistuskerroin ja vaihekulma.

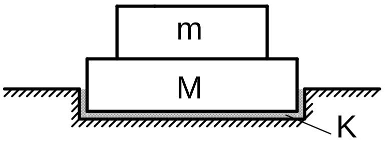
deksi $T = \left| F_A / F_0 \right|$ tulee lauseke

$$T = \left| \frac{F_A}{F_0} \right| = \sqrt{\frac{1 + (2\zeta r)^2}{\left(1 - r^2\right)^2 + (2\zeta r)^2}} \tag{4.43}$$

Siirtyvyys T on esitetty kuvassa 4.12 taajuussuhteen r funktiona muutamalla vaimennussuhteen ζ arvoilla. Kuvasta 4.12 nähdään, että $T > 1$ alueella $r < \sqrt{2}$ kaikilla vaimennussuhteen ζ arvoilla, jolloin jousen käyttö suurentaa alustaan siirtyvää voimaa. Alueessa $r > \sqrt{2}$ on $T < 1$, ja jousen käyttö pienentää alustaan siirtyvää voimaa. Huomataan myös, että alueessa $r > \sqrt{2}$ vaimennuksen lisääminen suurentaa alustaan siirtyvää voimaa, sillä käyrät menevät kohdassa $r = \sqrt{2}$ ristiin.



Kuva 4.12 Vaimenevan pakkovärähtelyn siirtyvyys.



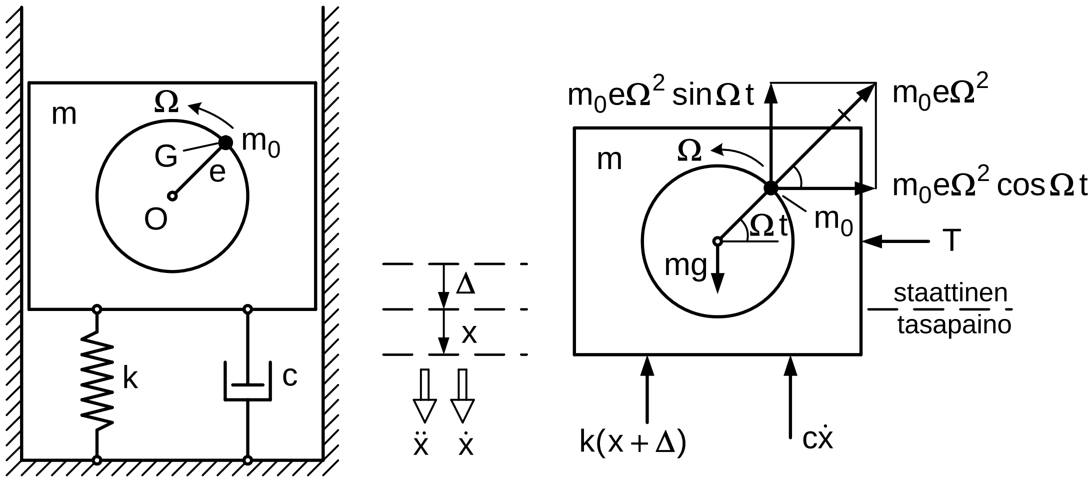
Kuva 4.13 Järjestely.

Kuvan 4.10 värähtelijän amplitudia X voidaan pienentää muuttamatta värähtelyn siirtyvyyttä T käyttämällä kuvan 4.13 mukaista järjestelyä. Siinä massa m on kiinnitetty suureen lisämassaan M ja jousivakio K valitaan siten, että $k/m = K/(m+M)$. Tällöin ω säilyy muuttumattomana ja myös T pysyy samana, kun vaimennusta ζ ei muuteta. Amplitudi X sen sijaan pienenee, koska jousivakio on sen lausekkeessa (4.36) nimittäjässä.

4.3.2 Tasapainottamaton roottori

Kuten kohdassa 4.2.2 tuli esille, aiheuttaa pyörivien koneenosien epätasapaino pakkovoimia. Tarkastellaan kuvassa 4.14 esitettyä laskentamallia, joka on muuten samanlainen kuin kuvan 4.6 malli, mutta sisältää lisäksi viskoosin vaimentimen. Massan vaakasuuntainen liike on estetty, jolloin se voi värähdellä vain pystysuunnassa. Roottorin epätasapainosta aiheutuu säteittäinen pyörivä hitausvoima $m_0 e \Omega^2$, jonka pystykomponentti $m_0 e \Omega^2 \sin \Omega t$ aiheuttaa pystysuuntaisen pakkovärähtelyn. On selvää, että liikeyhtälöksi tulee pystysuunnassa

$$\boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m_0 e \Omega^2 \sin \Omega t} \tag{4.44}$$



Kuva 4.14 Vaimennettu roottorivärähtely.

Yhtälö (4.44) on samaa muotoa kuin yhtälö (4.26), mutta amplitudin F_0 paikalla on pakkovoiman taajuudesta riippuva termi $m_0 e \Omega^2$. Tästä seuraa kaavojen (4.36) mukaan pakkovärähtelyn $x_p = X \sin(\Omega t - \phi)$ amplitudille X ja vaihekulmalle ϕ kaavat

$$X = \frac{m_0 e \Omega^2 / k}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(2\zeta \dfrac{\Omega}{\omega}\right)^2}} \qquad \phi = \arctan\left(\frac{2\zeta \dfrac{\Omega}{\omega}}{1 - \dfrac{\Omega^2}{\omega^2}}\right) \tag{4.45}$$

Kun merkitään jälleen $r = \Omega / \omega$, saadaan vahvistuskertoimelle M ja vaihekulmalle ϕ seuraavat kaavat

$$M = \frac{mX}{m_0 e} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \qquad \phi = \arctan\left(\frac{2\zeta r}{1-r^2}\right) \tag{4.46}$$

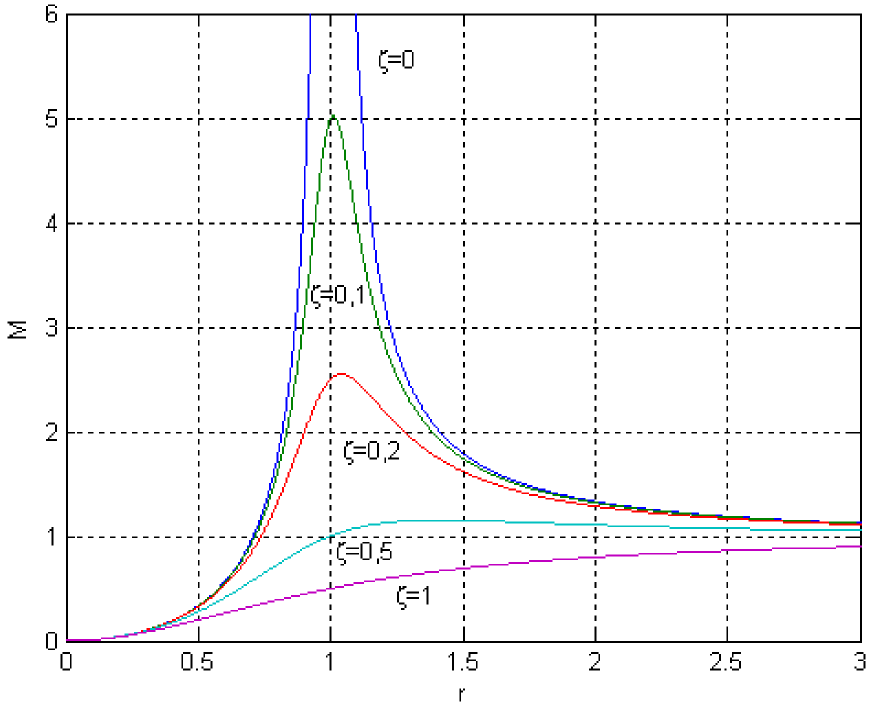
Kaavan (4.46) vahvistuskerroin M on esitetty kuvassa 4.15 taajuussuhteen r funktiona eri vaimennussuhteen ζ arvoilla. Vaihekulman ϕ lauseke on sama kuin kaavassa (4.37), joten se on esitetty kuvassa 4.11. Vahvistuskertoimen M käyrästöstä nähdään, että käyrien maksimit eivät ole kohdassa $\Omega = \omega$, vaan hieman sen oikealla puolella. Voidaan osoittaa, että resonanssikulmataajuus on $\omega_r = \omega / \left(\sqrt{1-2\zeta^2}\right)$ ja maksimiamplitudille X_{max} pätee kaava

$$X_{max} = \frac{m_0 e}{m} \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{4.47}$$

Ominaiskulmataajuutta ω vastaava amplitudi on

$$X_\omega = \frac{m_0 e}{m} \frac{1}{2\zeta} \tag{4.48}$$

joka eroaa pienellä vaimennuksella vähän arvosta X_{max}. Samoin resonanssitaajuus ω_r eroaa pienellä vaimennuksella vähän ominaiskulmataajuudesta ω, jota siksi sanotaan myös resonanssitaajuudeksi. Amplitudi X on pienillä pyörimisnopeuksilla lä-



Kuva 4.15 Vahvistuskerroin.

hellä nollaa ja suurilla pyörimisnopeuksilla $X \to (m_0/m)e$ vaimennussuhteesta riippumatta. Resonanssin läheisyydessä vaimennus pienentää tehokkaasti amplitudia.

Tutkitaan siirtyvyyttä kuvan (4.14) laskentamallin tapauksessa. Alustaan siirtyvän voiman maksimiarvo F_A on kaavan (4.42) mukainen ja siinä oleva amplitudi X saadaan kaavasta (4.45). Näistä seuraa

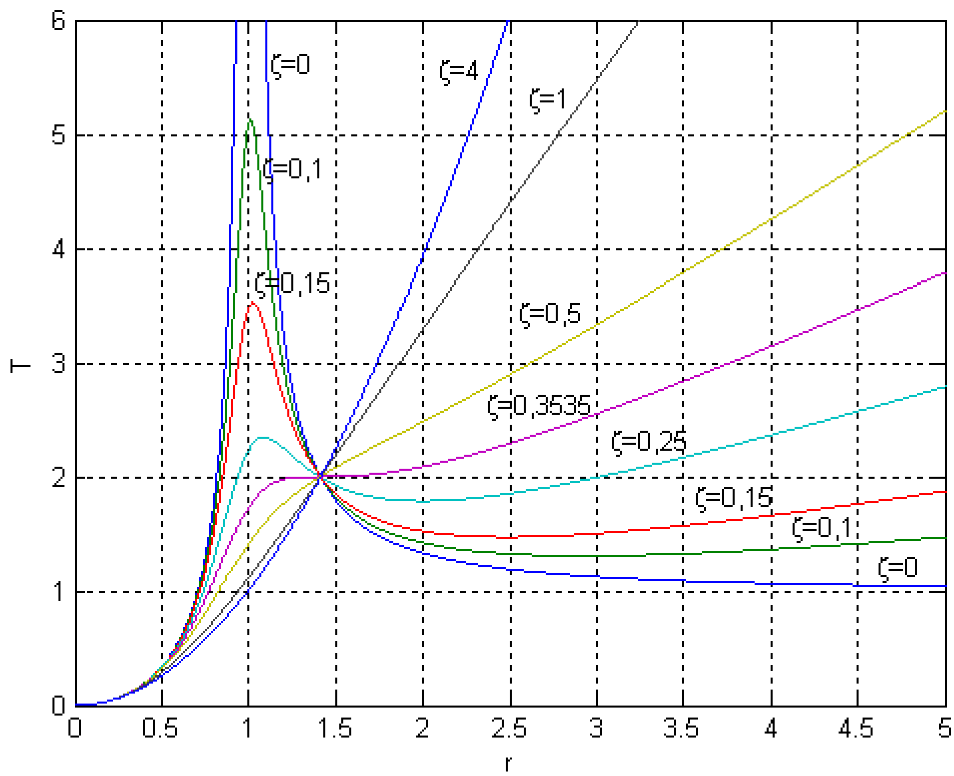
$$F_A = kX\sqrt{1+(2\zeta\Omega/\omega)^2} = k\frac{m_0 e}{m}\frac{(\Omega/\omega)^2}{\sqrt{\left[1-(\Omega/\omega)^2\right]^2+(2\zeta\Omega/\omega)^2}}\sqrt{1+(2\zeta\Omega/\omega)^2} \quad \Rightarrow$$

$$F_A = m_0 e\omega^2(\frac{\Omega}{\omega})^2\sqrt{\frac{1+(2\zeta\Omega/\omega)^2}{\left[1-(\Omega/\omega)^2\right]^2+(2\zeta\Omega/\omega)^2}} = F_n r^2\sqrt{\frac{1+(2\zeta r)^2}{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}} \tag{4.49}$$

jossa on merkitty $F_n = m_0 e\omega^2$, joka on ominaiskulmataajuutta ω vastaavan pakkovoiman amplitudi. Pakkovärähtelyn siirtyvyydeksi $T_n = |F_A/F_n|$ tulee

$$\boxed{T_n = \left|\frac{F_A}{F_n}\right| = r^2\sqrt{\frac{1+(2\zeta r)^2}{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}} \tag{4.50}$$

Kaavan (4.50) siirtyvyys T_n on esitetty kuvassa 4.16 taajuussuhteen r funktiona



Kuva 4.16 Siirtyvyys.

© Matti Lähteenmäki

muutamilla vaimennussuhteen ζ arvoilla. Kun $\zeta > \frac{1}{4}\sqrt{2} \approx 0{,}3535$ käyrillä ei ole ääriarvoja eli T_n kasvaa koko ajan, kun $r \to \infty$. Arvoilla $0 < \zeta < 0{,}3535$ käyrillä on sekä minimi että maksimi ja kaikki minimit ovat pienempiä kuin 2 mutta suurempia kuin 1. Rajatapauksessa $\zeta = 0$ $T_n \to 1$, kun $r \to \infty$. Käyristä nähdään myös, että suurilla pyörimisnopeuksilla pienikin vaimennus on haitallista. Esimerkiksi arvolla $\zeta = 0{,}25$ siirtyvä voima on kohdalla $r = 4{,}5$ suurempi kuin resonanssikohdassa siirtyvä voima. Kuvasta 4.15 nähdään, että amplitudi X on suurilla pyörimisnopeuksilla pieni, jolloin myös jousen kautta siirtyvä voima on pieni. Voima siirtyy suurilla pyörimisnopeuksilla lähinnä vaimentimen kautta, koska nopeus on suuri, jolloin vaimennusvoima on suuri.

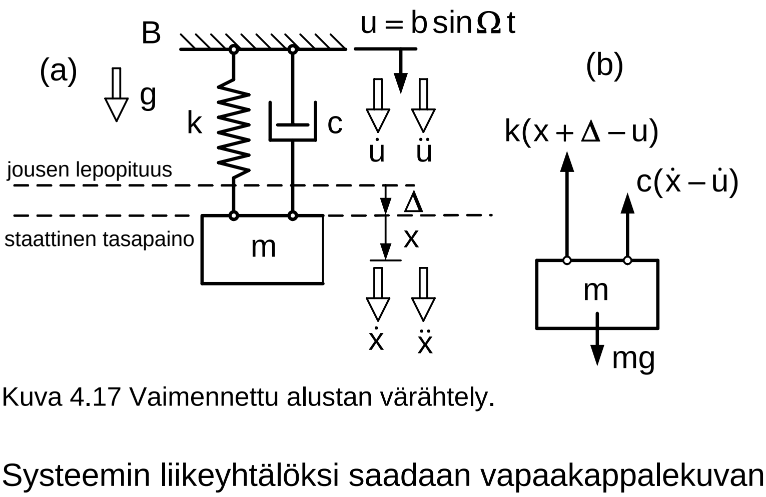
Alustaan siirtyvän maksimivoiman F_A lauseke (4.49) voidaan kirjoittaa myös vaihtoehtoiseen muotoon

$$F_A = m_0 e \Omega^2 \sqrt{\frac{1+(2\zeta\Omega/\omega)^2}{\left[1-(\Omega/\omega)^2\right]^2+(2\zeta\Omega/\omega)^2}} = F_{max}\sqrt{\frac{1+(2\zeta r)^2}{\left(1-r^2\right)^2+(2\zeta r)^2}} \tag{4.51}$$

jossa $F_{max} = m_0 e \Omega^2$ on kulmanopeutta Ω vastaavan pakkovoiman amplitudi. On selvää, että $\left|F_A / F_{max}\right| = T$, jossa T on kuvan 4.12 siirtyvyys. Kuva 4.12 ei anna oikeaa yleiskuvaa siirtyvän voiman suuruudesta, koska myös F_{max} kasvaa kulmanopeuden Ω kasvaessa. Kuvasta 4.12 syntyy helposti väärä käsitys, että siirtyvä voima lähestyy nollaa kulmanopeuden Ω kasvaessa, mikä ei tietenkään pidä paikkaansa.

4.3.3 Värähtelevä alusta

Tarkastellaan pakkovärähtelyä, joka aiheutuu alustan harmonisesta liikkeestä, kun vaimennus on viskoosi. Laskentamalli on esitetty kuvassa 4.17. Siinä on jousi k, vaimennin c, massa m sekä funktion $u(t) = b\sin\Omega t$ mukaisesti liikkuva alusta. Koordinaatti u ilmaisee alustan absoluuttisen aseman ja koordinaatti x massan absoluuttisen aseman.



Kuva 4.17 Vaimennettu alustan värähtely.

Systeemin liikeyhtälöksi saadaan vapaakappalekuvan 4.17 (b) avulla

$$\uparrow \quad k(x+\Delta-u) - mg + c(\dot{x}-\dot{u}) = -m\ddot{x} \tag{4.52}$$

Ottamalla huomioon, että $k\Delta = mg$ ja $\dot{u} = b\Omega\cos\Omega t$, saadaan liikeyhtälö muotoon

$$\boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = b(k\sin\Omega t + c\Omega\cos\Omega t)} \tag{4.53}$$

Yhtälö (4.53) voidaan kirjoittaa trigonometrian kaavojen avulla muotoon

$$\boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = A\sin(\Omega t + \alpha)} \tag{4.54}$$

jolloin vakioiden A ja α lausekkeet ovat (todistus sivuutetaan)

$$\boxed{A = b\sqrt{k^2 + (c\Omega)^2} \qquad \text{ja} \qquad \alpha = \arctan(c\Omega / k)} \tag{4.55}$$

Yhtälön (4.54) pakkovärähtelyä vastaava yksityisratkaisu on muotoa

$$x_p = X\sin(\Omega t - \beta) \tag{4.56}$$

Vakiot X ja β voidaan laskea yhtälöparista, joka saadaan sijoittamalla yrite (4.56) liikeyhtälöön (4.54). Tulos on (todistus sivuutetaan)

$$\boxed{X = \frac{b\sqrt{1 + \left(2\zeta\dfrac{\Omega}{\omega}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(2\zeta\dfrac{\Omega}{\omega}\right)^2}} \qquad \beta = \arctan\left[\frac{2\zeta\dfrac{\Omega^3}{\omega^3}}{1 - \dfrac{\Omega^2}{\omega^2} + \left(2\zeta\dfrac{\Omega}{\omega}\right)^2}\right]} \tag{4.57}$$

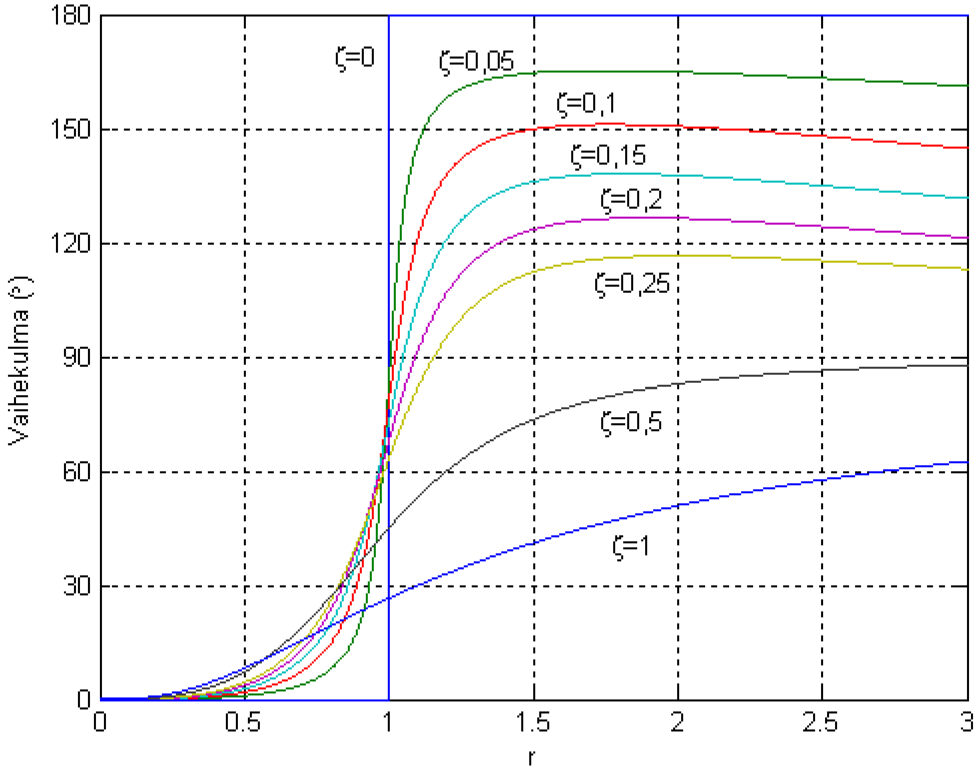
Kun merkitään jälleen $r = \Omega/\omega$, saadaan vahvistuskertoimelle M ja vaihekulmalle β seuraavat kaavat

$$\boxed{M = \frac{X}{b} = \sqrt{\frac{1 + (2\zeta r)^2}{\left(1 - r^2\right)^2 + (2\zeta r)^2}} \qquad \beta = \arctan\left[\frac{2\zeta r^3}{1 - r^2 + (2\zeta r)^2}\right]} \tag{4.58}$$

Kaavan (4.58) vahvistuskerroin M on sama lauseke kuin kaavassa (4.43) oleva siirtyvyys T, joten vahvistuskertoimen M arvot nähdään kuvasta 4.12. Vahvistuskerroin M ilmaisee, kuinka moninkertainen amplitudi X on alustan amplitudiin b verrattuna. Arvolla $r = \sqrt{2}$ on $M = 1$ vaimennussuhteen ζ arvosta riippumatta. Amplitudi X tulee pieneksi, kun r on suuri eli jousivakio k on pieni. Kuvassa 4.18 on esitetty vaihekulman β arvoja taajuussuhteen r funktiona muutamilla vaimennussuhteen ζ arvolla.

Kuvan 4.17 systeemin käyttäytymistä voidaan tutkia myös suhteellisen koordinaatin $z = x - u$ avulla. z ilmaisee massan m aseman alustaan B nähden. Sijoittamalla liikeyhtälöön (4.53) $x = z + b\sin\Omega t$, $\dot{x} = \dot{z} + b\Omega\cos\Omega t$ ja $\ddot{x} = \ddot{z} - b\Omega^2\sin\Omega t$ saadaan

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = mb\Omega^2\sin\Omega t \tag{4.59}$$



Kuva 4.18 Vaihekulma.

Yhtälö (4.59) on samaa muotoa kuin roottoriliikeyhtälö (4.44), kertoimen $m_0 e$ paikalla on tässä mb. Vahvistuskertoimelle $M = Z/b$ pätee näin ollen

$$\boxed{M = \frac{Z}{b} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}} \qquad (4.60)$$

ja sille voidaan käyttää kuvan 4.15 käyrästöä.

Tarkastellaan siirtyvyyttä kuvan 4.17 värähtelevän alustan tapauksessa. Nyt ollaan kiinnostuneita alustasta B massaan m siirtyvän voiman $F_m(t)$ maksimiarvosta F_A. Vapaakappalekuvan 4.17 (b) sekä kaavojen (4.31), (4.32) ja (4.59) perusteella

$$F_m(t) = k(x_p - u) + c(\dot{x}_p - \dot{u}) = k z_p + c \dot{z}_p = k Z \sin(\Omega t - \phi) - c \Omega Z \cos(\Omega t - \phi) \qquad (4.61)$$

Voidaan helposti todistaa, että voiman $F_m(t)$ maksimiarvo on

$$F_M = \sqrt{(kZ)^2 + (c\Omega Z)^2} = kZ\sqrt{1 + (2\zeta\Omega/\omega)^2} \qquad (4.62)$$

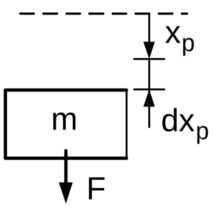
jossa amplitudi Z saadaan kaavasta (4.60). Alustan maksimi siirtymää vastaava jousivoima on $F_K = kb$. Siirtyvyydeksi $T_K = |F_M / F_K|$ saadaan näin ollen kaava

$$\boxed{T_K = \left|\frac{F_M}{F_K}\right| = r^2\sqrt{\frac{1+(2\zeta r)^2}{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}} \tag{4.63}$$

joka on samaa muotoa kuin kaavan (4.50) siirtyvyys T_n, joten siirtyvyydelle T_K voidaan käyttää kuvan (4.16) käyrästöä. Massaan kohdistuva voima saadaan pieneksi käyttämällä löysää jousta ja mahdollisimman pientä vaimennusta.

4.4 Vaimennukseen kuluva energia

Mekaanisissa systeemeissä esiintyy aina vaimennusta, jonka johdosta systeemin mekaanista energiaa muuttuu esimerkiksi lämpöenergiaksi tai ääniaaltojen energiaksi. Vapaassa värähtelyssä vaimennus ilmenee amplitudin pienenemisenä. Pysyvässä pakkovärähtelyssä herätevoiman tekemä työ korvaa vaimennukseen kuluvan energian.



Kuva 4.19 Pakkovoima.

Tutkitaan aluksi kuvan 4.19 mukaista tilannetta, jossa harmoninen pakkovoima $F(t) = F_0 \sin\Omega t$ vaikuttaa harmonista värähtelyä $x_p = X\sin(\Omega t - \phi)$ suorittavaan massaan m. Kulma ϕ on herätevoiman ja siirtymävasteen välinen vaihe-ero. Siirtymälisäyksen dx_p aikana voima tekee työn

$$dW = F\,dx_p = F_0 \sin\Omega t \cdot \Omega X \cos(\Omega t - \phi)\cdot dt \tag{4.64}$$

Yhden värähdysjakson aikana voima tekee työn

$$W = \int_0^{2\pi} F_0 X \sin\Omega t \cos(\Omega t - \phi)\, d(\Omega t) \tag{4.65}$$

Soveltamalla kosinin lausekkeessa (4.65) vähennyslaskukaavaa saadaan

$$W = F_0 X\cos\phi \int_0^{2\pi} \sin\Omega t\cos\Omega t\, d(\Omega t) + F_0 X\sin\phi \int_0^{2\pi} \sin^2\Omega t\, d(\Omega t) \tag{4.66}$$

Edellä ensimmäisen termin integraali on nolla ja toisen termin integraalin arvo on π, joten jakson aikana tehty työ on

$$\boxed{W = \pi F_0 X \sin\phi} \tag{4.67}$$

Kaavasta (4.67) nähdään, että siirtymän kanssa samassa $(\phi = 0^o)$ tai vastakkaisessa vaiheessa $(\phi = 180^o)$ olevan pakkovoiman jakson aikana tekemä työ on nolla. Voima tekee maksimityön, kun vaihekulma $\phi = 90^o$ eli voima on samassa vaiheessa nopeuden kanssa.

Määritetään sitten viskoosin vaimennusvoiman $F_d = c\dot{x}_p = c\Omega X\cos(\Omega t - \phi)$ yhden jakson aikana tekemä työ. Siirtymälisäyksen dx_p aikana voima tekee työn

$$dW_d = F_d\,dx_p = c\Omega X\cos(\Omega t - \phi)\cdot\Omega X\cos(\Omega t - \phi)\cdot dt \tag{4.68}$$

joten jakson aikana tehdyksi työksi tulee

$$\boxed{W_d = c\Omega X^2\int_0^{2\pi}\cos^2(\Omega t - \phi)\,d(\Omega t) = \pi c\Omega X^2} \tag{4.69}$$

Kaavasta (4.35) nähdään, että $F_0\sin\phi = c\Omega X$. Sijoittamalla tämä kaavaan (4.67) saadaan tulos $W = W_d$ eli pakkovoiman tekemä työ korvaa vaimennukseen kuluvan energian. Resonanssissa vaihekulma $\phi = 90^o$ ja pakkovoiman tekemä työ on maksimissaan, jolloin myös vaimennuksessa kuluva energia on maksimissaan. Resonanssissa $\Omega \approx \omega = \sqrt{k/m}$ ja lisäksi $c = 2\zeta\sqrt{km}$, joten kaavasta (4.69) tulee

$$\boxed{W_d = 2\zeta\pi\,kX^2 \quad (\Omega = \omega)} \tag{4.70}$$

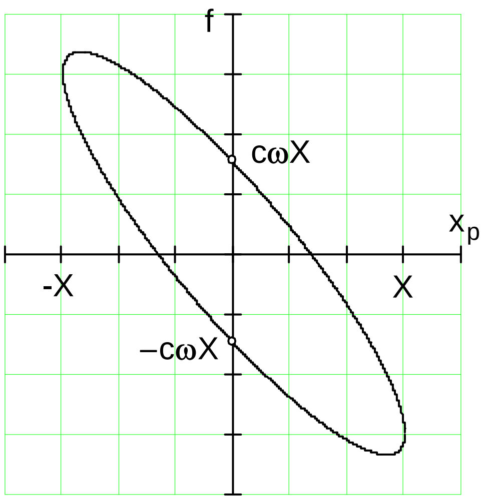
Vaimennukseen jakson aikana kuluvan energian lauseketta voidaan tarkastella graafisesti. Vapaakappalekuvan 4.10 (c) perusteella massaan m vaikuttaa voima

$$f = kx_p + c\dot{x}_p = kx_p + c\Omega X\cos(\Omega t - \phi) \quad\Rightarrow\quad (f - kx_p)^2 = (c\Omega X)^2[1 - \sin^2(\Omega t - \phi)]$$

joka voidaan kirjoittaa muotoon

$$\left(\frac{x_p}{X}\right)^2 + \left(\frac{f - kx_p}{c\Omega X}\right)^2 = 1 \tag{4.71}$$

Yhtälö (4.71) esittää $x_p f$-koordinaatistossa kuvan 4.20 mukaista ellipsiä, jota sanotaan hystereesisilmukaksi. Silmukan sisäpuolelle jäävä pinta-ala on yhtä suuri kuin jakson aikana vaimennukseen kulunut energia. Viskoosin vaimennuksen hystereesisilmukka on ellipsi. Jokaiseen vaimennusmalliin liittyy tietty hystereesisilmukan muoto, joka voi vaihdella suurestikin mallista riippuen. Kaikki hystereesisilmukat ovat kuitenkin suljettuja



Kuva 4.20 Hystereesisilmukka.

ja niiden rajoittama pinta-ala kuvaa vaimennuksessa tapahtuvaa energiahäviötä.

Materiaalien ominaisuuksia tutkittaessa käytetään usein vaimennuksen mittana ominaisvaimennuskykyä β tai häviökerrointa η, jotka määritellään seuraavassa. β on energiahäviön W_d suhde kimmoenergian maksimiarvoon V_{max}, josta seuraa resonanssitapaukselle

$$\beta = \frac{W_d}{V_{max}} = \frac{\pi c \omega X^2}{\frac{1}{2} k X^2} = \frac{2\pi c}{m\omega} = 4\pi\zeta \approx 2\delta \tag{4.72}$$

jossa δ on logaritminen dekrementti. Häviökerroin on $\eta = \beta / 2\pi$.

4.5 Ekvivalentti viskoosi vaimennus

Kuten kuvasta 4.11 nähdään, vaimennus vaikuttaa värähtelevään systeemiin pääasiassa pienentämällä amplitudia resonanssin läheisyydessä. Viskoosin vaimennuksen tapauksessa todettiin kohdassa 4.3.1, että resonanssiamplitudille pätee likikaava

$$X_{max} \approx X_\omega = \frac{F_0 / k}{2\zeta} = \frac{F_0}{c\,\omega} \tag{4.73}$$

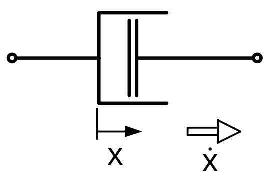
Muille vaimennusmalleille ei ole löydettävissä yhtä yksinkertaista kaavaa. Resonanssiamplitudia on kuitenkin mahdollista arvioida muillekin vaimennusmalleille ekvivalentin viskoosin vaimennusvakion c_{ekv} avulla. Vakio c_{ekv} löydetään merkitsemällä tarkasteltavaan vaimennusmalliin liittyvä energiahäviö W_d yhtä suureksi kuin vaimennusvakion c_{ekv} omaavan viskoosin vaimennuksen energiahäviö, joka on

$$W_d = \pi c_{ekv} \Omega X^2 \tag{4.74}$$

jolloin värähtelyliike on oletettu harmoniseksi. Oletus on usein voimassa vain likimääräisesti.

Tarkastellaan aluksi tilannetta, jossa vaimennusvoima on verrannollinen nopeuden neliöön. Tällöin vaimennusvoima on muotoa

$$F_d = \pm a \dot{x}^2 \tag{4.75}$$



Kuva 4.21 Vaimennusmalli.

jossa a on vakio sekä plusmerkki vastaa tapausta $\dot{x} > 0$ ja miinusmerkki tapausta $\dot{x} \le 0$. Tällaista vaimennusmallia voidaan käyttää nesteessä tai kaasussa värähtelevälle kappaleelle. Laskentamalleissa nopeuden neliöön verrannollinen vaimennus esitetään tavallisesti kuvan 4.21

© Matti Lähteenmäki

mukaisella vaimennuselementillä. Oletetaan värähtelyliike harmoniseksi $x_p = X\sin(\Omega t - \phi)$, jolloin $dx_p = \Omega X\cos(\Omega t - \phi)dt$ ja $\dot{x}_p = \Omega X\cos(\Omega t - \phi)$. Lisäksi resonanssissa on likimain $\Omega = \omega$, $\phi = \pi/2$ ja $X = X_\omega$. Energiahäviö jakson aikana on

$$W_d = 2\cdot\int_0^\pi a\left[\omega X_n \cos(\omega t - \pi/2)\right]^2 \omega X_n \cos(\omega t - \pi/2)dt \quad \Rightarrow$$

$$W_d = 2a\omega^2 X_n^3 \int_0^\pi \cos^3(\omega t - \pi/2)d(\omega t) = \frac{8}{3}a\omega^2 X_\omega^3$$

Kaavan (4.74) perusteella voidaan kirjoittaa

$$\frac{8}{3}a\omega^2 X_\omega^3 = \pi c_{ekv}\,\omega X_\omega^2 \qquad \Rightarrow \qquad c_{ekv} = \frac{8}{3\pi}a\omega X_\omega$$

$$\Rightarrow \quad X_{max} \approx X_\omega = \sqrt{\frac{3\pi F_0}{8a\omega^2}} \tag{4.76}$$

Ekvivalenttia viskoosia vaimennusta voidaan käyttää myös amplitudin X ja vaihe-kulman ϕ approksimoimiseen koko taajuusalueella. Tarkastellaan esimerkkinä kitka-vaimennusta. Oletetaan, että harmonista pakkovoimaherätettä vastaa harmoninen siirtymävaste myös kitkavaimennuksella. Vaimennusvoima $F_d = \mu N$ tekee jakson neljänneksen aikana työn $\mu N X$, jossa X on amplitudi. Kaavan (4.59) perusteella saadaan tulos

$$W_d = 4\mu N X = \pi c_{ekv}\,\Omega X^2 \qquad \Rightarrow \qquad c_{ekv} = \frac{4\mu N}{\pi\Omega X} \tag{4.77}$$

$$\Rightarrow \qquad \zeta_{ekv} = \frac{c_{ekv}}{c_k} = \frac{4\mu N}{\pi\Omega X}\frac{1}{2m\omega} \qquad \Rightarrow \qquad 2\zeta_{ekv}\frac{\Omega}{\omega} = \frac{4\mu N}{\pi k X}$$

Kun edellä kirjoitettu tulos sijoitetaan kaavoihin (4.36), seuraa

$$\frac{X}{F_0/k} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + \left(\dfrac{4\mu N}{\pi k X}\right)^2}} \qquad\qquad \phi = \arctan\left(\frac{\dfrac{4\mu N}{\pi k X}}{1-r^2}\right)$$

Ratkaisemalla näistä X ja ϕ saadaan kaavat

$$M = \frac{X}{F_0/k} = \frac{\sqrt{1-\left(\dfrac{4\mu N}{\pi F_0}\right)^2}}{1-r^2} \qquad \phi = \arctan\left[\frac{\pm\dfrac{4\mu N}{\pi F_0}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{4\mu N}{\pi F_0}\right)^2}}\right] \tag{4.78}$$

Kaavat (4.78) ovat voimassa vain, jos neliöjuuren alla oleva termi on positiivinen eli $4\mu N/(\pi F_0) < 1$. Nähdään myös, että $M \to \infty$, kun $\Omega \to \omega$. Vaihekulman ϕ kaavassa pätee plusmerkki, kun $r < 1$, mutta miinusmerkki, kun $r > 1$. ϕ on epäjatkuva resonanssikohdassa.

 © Matti Lähteenmäki