

## 5 YHDEN VAPPAUSASTEEN YLEINEN PAKOTETTU LIIKE

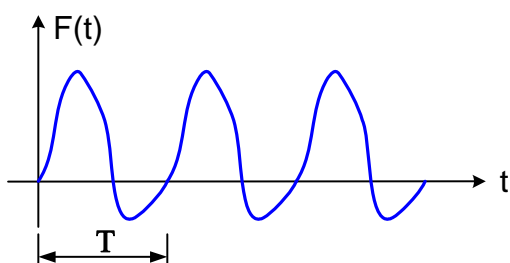
### 5.1 Johdanto

Luvussa 4 tarkasteltiin yhden vapausasteen systeemiin harmonisesta herätteestä aiheutuvaa vastetta ja havaittiin sen riippuvan pääasiassa systeemin vaimennuksesta ja herätteen taajuudesta. Harmonisen herätteen tapauksessa pakkovärähtelyä edustava liikeyhtälön yksityisratkaisu löydettiin helposti kokeilemalla. Tämä ratkaisutapa onnistuu myös muille yksinkertaisille herätefunktioille, mutta ei yleisesti. Kokeilumenetelmän lisäksi on kehitetty myös muita analyyttisiä menetelmiä yleisestä dynaamisesta herätteestä aiheutuvan vasteen määrittämiseksi. Näistä tärkeimmät ovat Duhamelin integraali, Fourier-sarja ja -muunnos sekä Laplace-muunnos. Fourier-sarjaa voidaan soveltaa vain jaksolliseen heräteeseen, mutta muita yleisesti. Tässä tarkastellaan vain Fourier-sarjan ja Duhamelin integraalin käyttöä.

Monissa tapauksissa analyyttisen ratkaisun löytäminen ei ole mahdollista. Herätefunktio voi olla niin mutkikas, että analyyttinen ratkaisu ei onnistu tai herätefunktiosta on tiedossa vain mittaustuloksia tiettyinä ajan hetkinä, jolloin tarkkaa analyyttistä lauseketta ei tunneta. Tällöin liikeyhtälön ratkaisu on etsittävä likimääräisesti jotakin numeerista algoritmia käyttäen. Näitä on olemassa runsaasti, esimerkkeinä mainittakoon keskeisdifferenssimenetelmä, Runge-Kutta menetelmä, Newmarkin menetelmä ja Wilsonin  $\theta$ -menetelmä. Tässä ei tarkastella numeerisia ratkaisumenetelmiä.

### 5.2 Yleinen jaksollinen kuormitus

Luvussa 4 nähtiin, että harmonista herätettä vastaava siirtymävaste voidaan löytää helposti kokeilemalla. Harmonisen herätteen teoriaa voidaan yleistää yleisen jaksollisen herätteen käsittelyyn. Dynaamiseen systeemiin vaikuttavat herätteet ovat usein jaksollisia tai niitä voidaan approksimoida jaksollisilla funktioilla.



Kuva 5.1 Jaksollinen heräte.

Kuvassa 5.1 on tyypillinen jaksollinen herätefunktio jakson pituuden ollessa  $T$ . Jaksollisuudesta seuraa, että on voimassa

$$F(t + T) = F(t) \quad (5.1)$$

Matematiikassa osoitetaan, että mielivaltaisen jaksollinen funktio voidaan jakaa harmonisiin komponentteihinsa kirjoittamalla se Fourier-sarjaksi seuraavasti

$$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\Omega t) \quad (5.2)$$

jossa  $\Omega = 2\pi/T$  on kuormituksen perustaajuus. Vakiot  $a_n$  ja  $b_n$  ovat kertalukua  $n$  olevan harmonisen komponentin amplitudit.  $a_n$  ja  $b_n$  voidaan laskea kaavoista

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} F(t) dt & a_n &= \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} F(t) \cos(n\Omega t) dt \quad n > 0 \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} F(t) \sin(n\Omega t) dt \quad n \geq 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

joissa  $t_0$  on mielivaltainen ajan hetki. Integrointi kaavoissa (5.3) suoritetaan jakson matkalta, mutta integrointiväli voidaan muuten valita mielivaltaisesti.  $a_0$  on tarkasteltavan funktion keskiarvo. Fourier-sarjassa voi teoriassa olla ääretön määrä termejä, käytännössä kuitenkin funktiota  $F(t)$  voidaan yleensä approksimoida riittävän tarkasti melko pienellä määrällä termejä sarjan alusta.

Kun jaksollinen kuormitusheräte  $F(t)$  vaikuttaa kuvan 4.10 mukaiseen vaimennettuun värähtelijään, tulee liikeyhtälöksi kuormituksen Fourier-sarjaa käyttäen

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\Omega t) \quad (5.4)$$

Koska yhtälö (5.4) on lineaarinen, voidaan sen ratkaisu jakaa osiin seuraavasti

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = a_0 \quad \Rightarrow \quad x_{p1}(t) = a_0/k \quad (5.5)$$

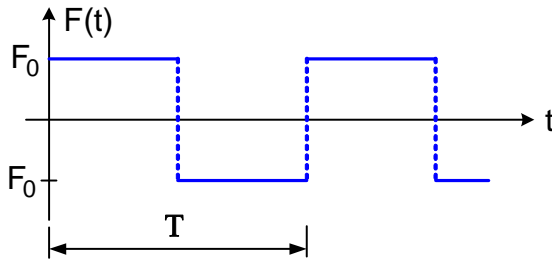
$$\begin{aligned} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= a_n \cos(n\Omega t) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad \Rightarrow \\ x_{p2n}(t) &= \frac{a_n/k}{\sqrt{(1-n^2 r^2)^2 + (2\zeta nr)^2}} \cos(n\Omega t - \phi_n) \quad \phi_n = \arctan\left(\frac{2\zeta nr}{1-n^2 r^2}\right) \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= b_n \sin(n\Omega t) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad \Rightarrow \\ x_{p3n}(t) &= \frac{b_n/k}{\sqrt{(1-n^2 r^2)^2 + (2\zeta nr)^2}} \sin(n\Omega t - \phi_n) \quad \phi_n = \arctan\left(\frac{2\zeta nr}{1-n^2 r^2}\right) \end{aligned} \quad (5.7)$$

jolloin kaavat (5.6) ja (5.7) on kirjoitettu ratkaisun (4.36) perusteella ja  $r = \Omega/\omega$ . Laskemalla osaratkaisut (5.5) - (5.7) yhteen seuraa siirtymävasteelle lauseke

$$x_p(t) = \frac{a_0}{k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n/k}{\sqrt{(1-n^2 r^2)^2 + (2\zeta nr)^2}} \cos(n\Omega t - \phi_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n/k}{\sqrt{(1-n^2 r^2)^2 + (2\zeta nr)^2}} \sin(n\Omega t - \phi_n) \quad (5.8)$$

Tarkastellaan esimerkkinä kuormitusfunktion Fourier-sarjasta kuvan 5.2 mukaista tapausta. Fourier-kertoimet (5.3) voidaan laskea integroimalla jakson yli aikavälillä  $-T/2 \leq t \leq T/2$ . Kuormitusfunktion lauseke on tarkasteluvälillä



$$F(t) = \begin{cases} -F_0 & , -T/2 \leq t < 0 \\ F_0 & , 0 \leq t \leq T/2 \end{cases} \quad (5.9)$$

Kuva 5.2 Kuormitusfunktio.

Kaavoista (5.3) saadaan Fourier-kertoimille seuraavat arvot

$$a_0 = \frac{1}{T} \left( -\int_{-T/2}^0 F_0 dt + \int_0^{T/2} F_0 dt \right) = 0 \quad (5.10)$$

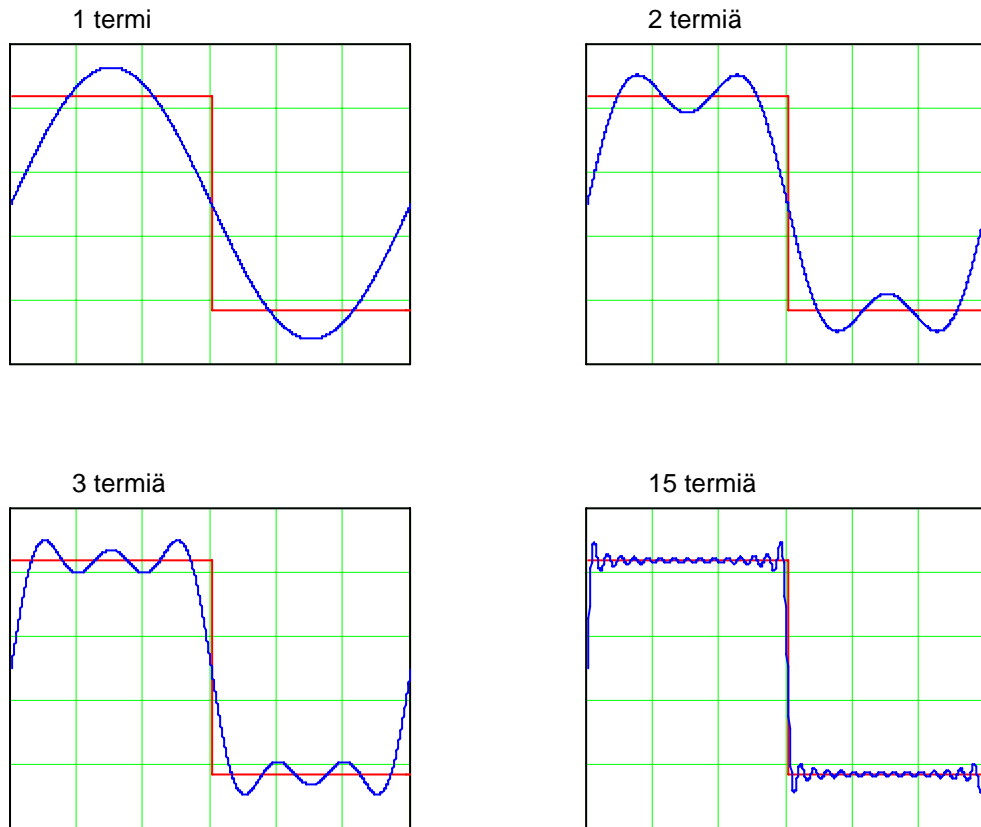
$$a_n = \frac{2}{T} \left( -\int_{-T/2}^0 F_0 \cos(n\Omega t) dt + \int_0^{T/2} F_0 \cos(n\Omega t) dt \right) = 0 \quad n > 0 \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \left( -\int_{-T/2}^0 F_0 \sin(n\Omega t) dt + \int_0^{T/2} F_0 \sin(n\Omega t) dt \right) = \frac{4F_0}{T} \int_0^{T/2} \sin(n\Omega t) dt = \\ &= \frac{-4F_0}{Tn\Omega} \Big|_0^{T/2} \cos(n\Omega t) = \frac{-4F_0}{Tn\Omega} [\cos(n\pi) - 1] = \begin{cases} 0 & , n \text{ parillinen} \\ \frac{4F_0}{n\pi} & , n \text{ pariton} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.12)$$

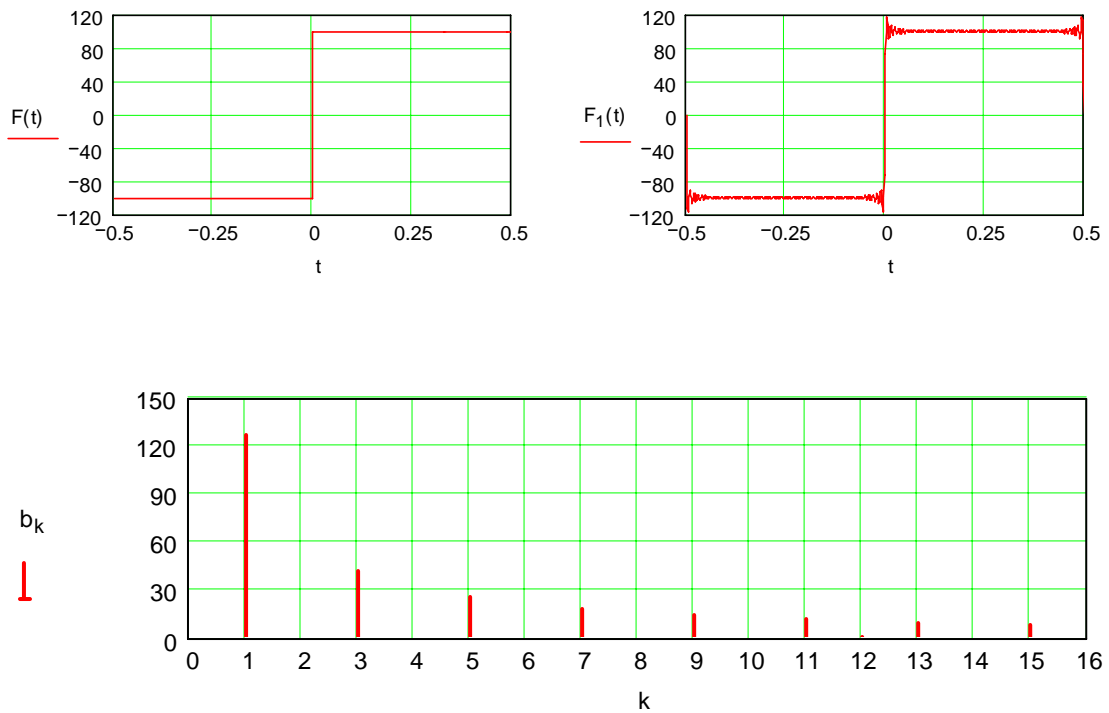
Fourier-sarjan parillisten kosinitermien kertoimet  $a_0$  ja  $a_n$  ovat nollia, koska kuormitusfunktio on pariton. Kuvan 5.2 kuormitusfunktion Fourier-sarja on siis

$$F(t) = \frac{4F_0}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{1}{n} \sin(n\Omega t) \quad (5.13)$$

Kuvassa 5.3 on kuormitusfunktio (5.9) ja sen neljä Fourier-sarjasta (5.13) saatavaa approksimaatiota.



Kuva 5.3 Kuormituksen Fourier-sarja.



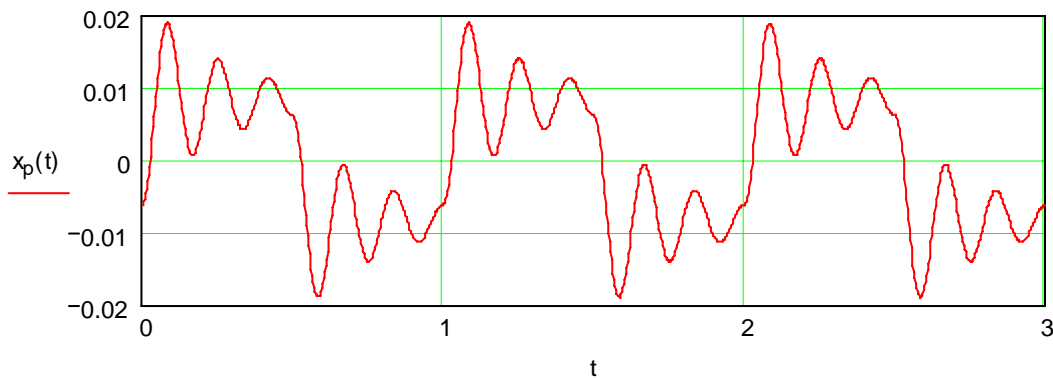
Kuva 5.4 Kuormitusfunktio, sen Fourier-approksimaatio ja -spektri.

Jaksollista funktiota voidaan myös havainnollistaa esittämällä sen spektri, joka tarkoittaa funktion Fourier-kertoimien esittämistä taajuuden funktiona. Kuvassa 5.4 on esitetty kuormitusfunktio (5.9) ( $F_0 = 100\text{N}$  ja  $T = 1\text{s}$ ), sen Fourier-approksimaatio (5.13) (50 nollasta poikkeavaa termiä) ja Fourier-spektri kertoimille  $b_k$  (8 nollasta poikkeavaa termiä,  $k$  on kertaluku perustaajuuteen  $\Omega$  nähden).

Kun kuormitusfunktion Fourier-sarja (5.13) tunnetaan, voidaan kirjoittaa siirtymävasteen Fourier-sarja kaavan (5.8) perusteella seuraavasti

$$x_p(t) = \frac{4F_0}{\pi k} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{\sin(n\Omega t - \phi_n)}{n\sqrt{(1-n^2r^2)^2 + (2\zeta nr)^2}} \quad \phi_n = \arctan\left(\frac{2\zeta nr}{1-n^2r^2}\right) \quad (5.14)$$

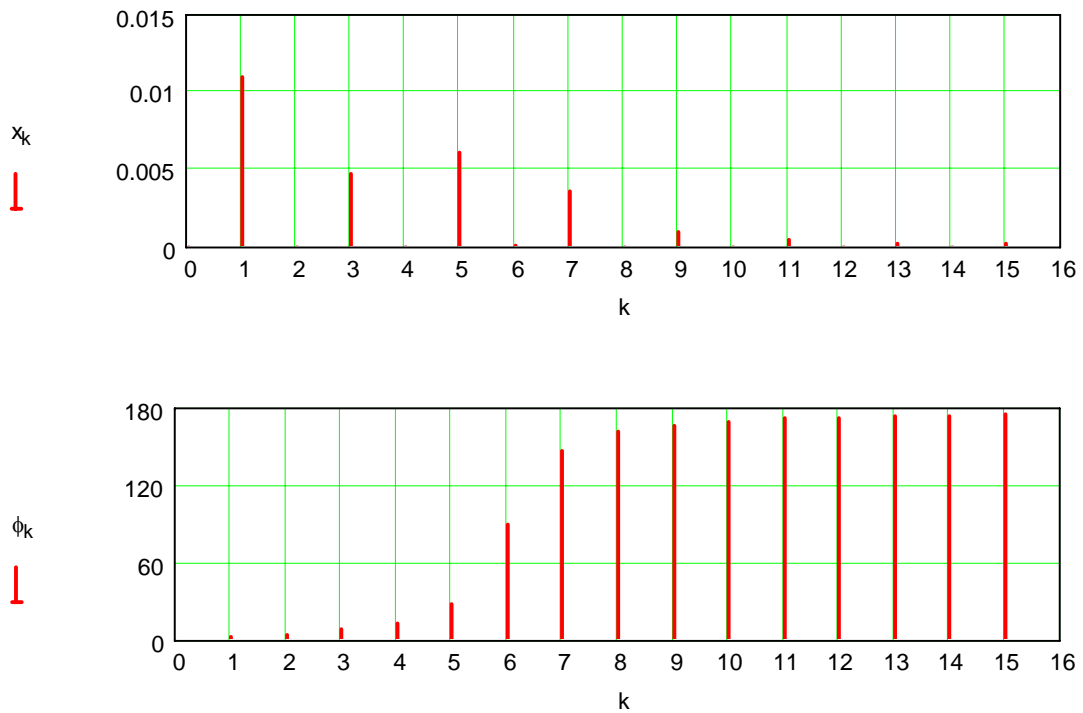
Kuvassa 5.5 on esitetty siirtymävasteen (5.14) kuvaaja kolmen kuormitusjakson ajalta, kun lukuarvoina on  $F_0 = 100\text{N}$ ,  $k = 12000\text{N/m}$ ,  $F_0/k = 0,00833\text{m}$ ,  $m = 8,4\text{kg}$ ,  $\omega = 37,796\text{rad/s}$ ,  $\zeta = 0,1$ ,  $T = 1\text{s}$ ,  $\Omega = 6,283$   $r = \Omega/\omega = 0,166$  ja  $\omega \approx 6 \cdot \Omega$ .



Kuva 5.5 Siirtymävaste.

Kuvassa 5.6 on vielä siirtymävasteen  $x_p(t)$  ja vaihekulman  $\phi_n$  Fourier-spektrit taajuuskaistalla  $0 \dots 16 \cdot \Omega$ .

On selvää, että tiettyä suhdetta  $\Omega/\omega$  vastaten osa herätteen Fourier-komponenttien kulmataajuuksista on ominaiskulmataajuuden alapuolella ja osa sen yläpuolella. Jos jokin kuormituksen Fourier-komponenttien kulmataajuuksista  $n\Omega$  on lähellä ominaiskulmataajuutta  $\omega \approx 6 \cdot \Omega$ , on vastaava vasteen Fourier-komponentti suuri. Siirtymävasteen kulmataajuuksiin  $5 \cdot \Omega$  ja  $7 \cdot \Omega$  liittyvät Fourier komponentit ovat vahvistuneet tästä syystä kuvassa 5.6. Vaihekulman spektrissä näkyvät pylväät myös nollamplitudilla esiintyville, parillisiin  $n$ -arvoihin liittyville Fourier-komponenteille, joilla ei siis nyt ole merkitystä. Nähdään kuitenkin, että kulmataajuutta  $\omega \approx 6 \cdot \Omega$  vastaava vaihekulma on noin  $90^\circ$ , kuten pitääkin. Ominaiskulmataajuutta matalampiin herätteen kulmataajuuksiin liittyvät vaihekulmat ovat pienempiä kuin  $90^\circ$  ja korkeampiin kulmataajuuksiin liittyvät vaihekulmat suurempia kuin  $90^\circ$ , mikä on yhtäpitävää aikaisemmin kuvassa 4.11 esitetyn käyrästäön kanssa.

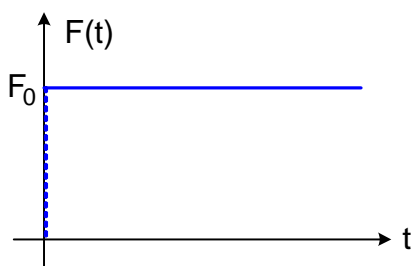


Kuva 5.6 Siirtymävasteen ja vaihekulman Fourier-spektrit.

### 5.3 Transienttikuormituksia

Transienttikuormituksella tarkoitetaan kuormituserätettä, joka aiheuttaa systeemiin lyhytaikaisen liiketilan. Transienttikuormitukselle on tyypillistä nopea kasvu suurimpaan arvoonsa ja usein lyhytaikainen vaikutus. Kuormitusta voidaan mallintaa monella eri tavalla, joista tässä tarkastellaan neljää perustapausta, nimittäin askelkuormitusta, suorakulmaista pulssikuormitusta, ramppikuormitusta ja impulssikuormitusta. Kuormituksen oletetaan vaikuttavan kuvan 4.10 mukaiseen jousi-massa-vaimennin systeemiin, jossa erityistapauksessa voi olla vaimennusvakio  $c = 0$ .

#### 5.3.1 Askelkuormitus



Askelkuormitus tarkoittaa kuvan 5.1 mukaista tilannetta, jossa systeemiin alkaa vaikuttaa hetkellä  $t = 0$  äkillisesti voima  $F_0$ , joka tämän jälkeen pysyy vakiona. Systeemin liikeyhtälö on

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \quad t \geq 0 \quad (5.15)$$

Kuva 5.7 Askelkuormitus.

Oletetaan, että systeemi on ennen kuormituksen

vaikutusta levossa, ts.  $x(0^-) = 0$  ja  $\dot{x}(0^-) = 0$ . Yhtälön (5.15) ratkaisu on muotoa  $x = x_h + x_p$ , missä  $x_h$  on kaavan (3.41) mukainen vaimennuksen ollessa alikriittinen. Yksityisratkaisu  $x_p$  on selvästi muotoa

$$x_p = F_0/k \quad t \geq 0 \quad (5.16)$$

Tästä seuraa liikeyhtälön yleiseksi ratkaisuksi

$$x(t) = \frac{F_0}{k} + e^{-\zeta\omega t} (A_3 \sin \omega_d t + A_4 \cos \omega_d t) \quad (5.17)$$

Kun vakiot  $A_3$  ja  $A_4$  määritetään alkuehdoista  $x(0) = 0$  ja  $\dot{x}(0) = 0$ , saadaan askelkuormitusta vastaavaksi siirtymävasteeksi

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \left[ 1 - e^{-\zeta\omega t} \left( \frac{\zeta\omega}{\omega_d} \sin \omega_d t + \cos \omega_d t \right) \right] \quad (5.18)$$

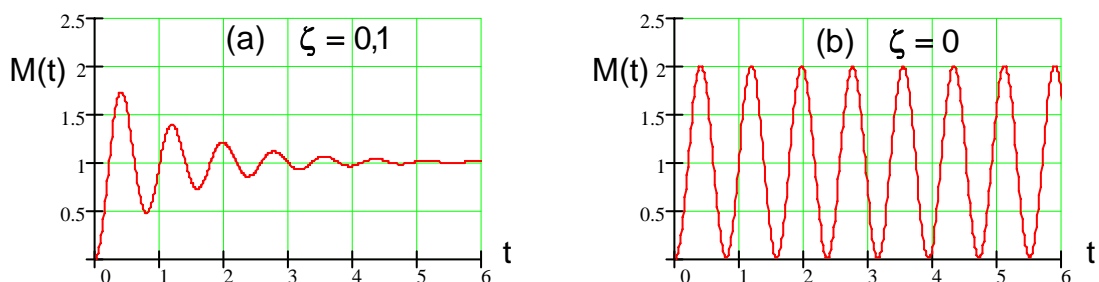
Dynaamista kuormitusta tutkittaessa kannattaa määritellä vahvistuskertoimen, joka kertoo, mikä on dynaamisen siirtymävasteen suhde vastaavaan staattiseen siirtymävasteeseen. Tässä tapauksessa vahvistuskertoimen on

$$M(t) = x(t)/(F_0/k) = x(t)/x_{st} \quad (5.19)$$

jossa  $x_{st} = F_0/k$  on staattisen voiman  $F_0$  aiheuttama siirtymä. Kaavan (5.18) perusteella on

$$M(t) = 1 - e^{-\zeta\omega t} \left( \frac{\zeta\omega}{\omega_d} \sin \omega_d t + \cos \omega_d t \right) \quad (5.20)$$

Kuvassa 5.8 (a) on esitetty tyypillinen vahvistuskertoimen kuvaaja ajan funktiona. Kohta  $M(t) = 1$  vastaa staattista siirtymää. Koska kuormitus vaikuttaa äkillisesti, on siirtymässä ylilyönti staattisen siirtymän ohi, minkä jälkeen systeemi palaa staattiseen



Kuva 5.8 Vahvistuskertoimen.

siirtymään vaimenevaa värähtelyä suorittaen. Vaimennuksen suuruus määrää yli-lyönnin määrän ja nopeuden, jolla värähtely vaimenee kohti staattista siirtymäarvoa.

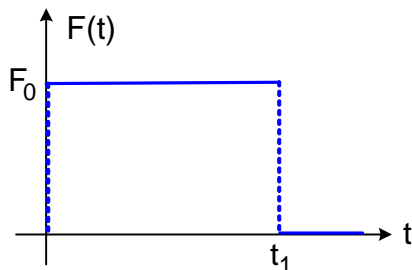
Jos vaimennusta ei ole, on  $\zeta = 0$  ja yhtälöstä (5.20) seuraa vahvistuskerroin

$$M(t) = 1 - \cos \omega t \quad (5.21)$$

Tämä on esitetty kuvassa 5.8 (b), josta nähdään, että  $M_{\max} = 2$ . Äkillisesti vaikuttavan voiman aiheuttaman siirtymän maksimiarvo vaimentamattomassa lineaarisessa systeemissä on siis kaksinkertainen staattiseen siirtymään verrattuna. Sama pätee myös systeemin rakenneosiin syntyviin jännityksiin. Dynaamisten kuormitusten alaisen rakenteiden suunnittelussa voidaan näin ollen käyttää varmuuskerrointa 2 ottaen huomioon kuormituksen yhtäkkinen vaikutus. Todellisuudessa vaimennus pienentää tätä vaikutusta, kuten kuvasta 5.8 (a) nähdään, mutta kertoimen 2 käyttö on varmalla puolella.

### 5.3.2 Suorakulmiopulssikuormitus

Suorakulmiopulssikuormitus tarkoittaa kuvan 5.9 mukaista kuormitusta, jossa voima  $F_0$  alkaa äkillisesti vaikuttaa hetkellä  $t = 0$  ja pysyy sen jälkeen vakiona, kunnes hetkellä  $t = t_1$  voiman vaikutus äkillisesti lakkaa.



Kuva 5.9 Suorakulmiopulssikuormitus.

Liikkeyhtälö on tässä kuormitustapauksessa

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \begin{cases} F_0 & 0 \leq t \leq t_1 \\ 0 & t > t_1 \end{cases} \quad (5.22)$$

Systeemi on ennen kuormituksen vaikuttamista levossa, ts.  $x(0^-) = 0$  ja  $\dot{x}(0^-) = 0$ . Liikkeyhtälön ratkaisu on aikavälillä  $0 \leq t \leq t_1$  kaavan (5.18) mukainen. Kun  $t > t_1$ , ratkaisu on kaavan

(3.41) ominaisvärähtelyä, jolloin vakiot  $A_3$  ja  $A_4$  määräytyvät ratkaisusta (5.18) hetkellä  $t = t_1$  saatavista alkuehdoista. Ratkaisu on periaatteessa helposti muodostettavissa vaimennetulle systeemillekin aikavälille  $t > t_1$ , mutta tyydytään tässä vaimenemattoman tapauksen  $c = 0$  tarkasteluun. Liikkeyhtälön ratkaisu on tässä tapauksessa kaavojen (5.21) ja (3.7) perusteella

$$x(t) = \begin{cases} \frac{F_0}{k}(1 - \cos \omega t) & 0 \leq t \leq t_1 \\ A_1 \sin \omega(t - t_1) + A_2 \cos \omega(t - t_1) & t > t_1 \end{cases} \quad (5.23)$$

Vakiot  $A_1$  ja  $A_2$  on määritettävä alkuehdoista hetkellä  $t = t_1$ . Kaavasta (5.23) saa-



daan derivoimalla ajan suhteen nopeuden lausekkeeksi aikavälillä  $0 \leq t \leq t_1$

$$\dot{x}(t) = \frac{F_0}{k} \omega \sin \omega t \quad 0 \leq t \leq t_1 \quad (5.24)$$

Alkuehdot hetkellä  $t = t_1$  ovat näin ollen

$$x(t_1) = \frac{F_0}{k} (1 - \cos \omega t_1) \quad \dot{x}(t_1) = \frac{F_0}{k} \omega \sin \omega t_1 \quad (5.25)$$

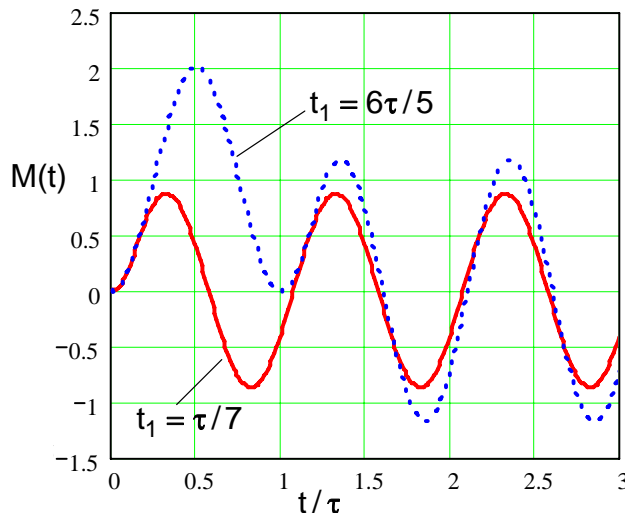
josta seuraa vakioille  $A_1$  ja  $A_2$  lausekkeet

$$A_1 = \frac{F_0}{k} \sin \omega t_1 \quad A_2 = \frac{F_0}{k} (1 - \cos \omega t_1) \quad (5.26)$$

Sijoittamalla vakiot  $A_1$  ja  $A_2$  ratkaisuun (5.23) ja sieventämällä tulosta trigonometri-an avulla saadaan ratkaisua (5.23) vastaava vahvistuskerroin muotoon

$$M(t) = \frac{x(t)}{F_0/k} = \begin{cases} 1 - \cos \omega t & 0 \leq t \leq t_1 \\ \cos \omega (t - t_1) - \cos \omega t & t > t_1 \end{cases} \quad (5.27)$$

Kuvassa 5.4 on vahvistuskertoimen (5.27) kuvaaja kuormituspulssin kestoajan  $t_1$  arvoilla  $\tau/7$  ja  $6\tau/5$ , missä  $\tau$  on ominaisvärähdysaika. Tapauksessa  $t_1 = \tau/7$  mak-

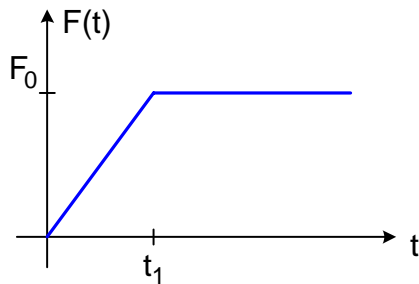


Kuva 5.10 Vahvistuskerroin

simiampiitudi esiintyy vasta kuormituksen poistumisen jälkeen alueella  $t > t_1$ . Tapauksessa  $t_1 = 6\tau/5$  maksimiampiitudi esiintyy kuormituksen vaikutusaikana välillä  $0 \leq t \leq t_1$ . Systemin maksimiirrtymä voi siis esiintyä myös kuormituksen poistumisen jälkeen, jos kuormituspulssin kestoaika  $t_1$  on riittävän pieni. Kaavan (5.27) avulla voidaan helposti osoittaa, että rajatapaus on  $t_1 = \tau/2$ , jolloin maksimi esiintyy juuri kuormituksen poistuessa.

### 5.3.3 Ramppikuormitus

Ramppikuormitus on kuvan 5.11 mukainen kuormitustilanne, jossa kuormitus kasvaa



Kuva 5.11 Ramppikuormitus.

lineaarisesti arvoon  $F_0$  ajan  $t_1$  kuluessa, minkä jälkeen se pysyy vakiona. Liikkeyhtälö on tässä kuormitustapauksessa

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \begin{cases} F_0 t/t_1 & 0 \leq t \leq t_1 \\ F_0 & t > t_1 \end{cases} \quad (5.28)$$

Kun systeemi on ennen kuormituksen vaikutusta levossa, ovat alkuehdot  $x(0) = 0$  ja  $\dot{x}(0) = 0$ . Liikkeyhtälön (5.28) ratkaisu on aikavälillä  $0 \leq t \leq t_1$

$$x(t) = \frac{F_0}{t_1 k} \left( t - \frac{c}{k} \right) + e^{-\zeta \omega t} (A_1 \sin \omega_d t + A_2 \cos \omega_d t) \quad (5.29)$$

missä vakiot  $A_1$  ja  $A_2$  saadaan alkuehdoista. Vastaavasti välillä  $t > t_1$  ratkaisu on

$$x(t) = \frac{F_0}{k} + e^{-\zeta \omega (t-t_1)} [B_1 \sin \omega_d (t-t_1) + B_2 \cos \omega_d (t-t_1)] \quad (5.30)$$

Vakiot  $B_1$  ja  $B_2$  saadaan alkuehdoista  $x(t_1) = x_1$  ja  $\dot{x}(t_1) = \dot{x}_1$ , missä  $x_1$  ja  $\dot{x}_1$  lasketaan kaavan (5.29) avulla. Ratkaisusta tulee vaimennetussa tapauksessa melko pitkä, joten tyydytään tässä vain vaimenemattoman tapauksen tarkasteluun. Kun  $c = 0$ , saavat kaavat (5.29) ja (5.30) muodon

$$x(t) = \begin{cases} \frac{F_0 t}{k t_1} + A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t & 0 \leq t \leq t_1 \\ \frac{F_0}{k} + B_1 \sin \omega (t-t_1) + B_2 \cos \omega (t-t_1) & t > t_1 \end{cases} \quad (5.31)$$

Alkuehdoista  $x(0) = 0$  ja  $\dot{x}(0) = 0$  seuraa vakioille  $A_1$  ja  $A_2$  arvot

$$A_1 = -\frac{F_0}{\omega t_1 k} \quad A_2 = 0 \quad (5.32)$$

josta seuraa ratkaisuksi aikavälillä  $0 \leq t \leq t_1$

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \left( \frac{t}{t_1} - \frac{1}{\omega t_1} \sin \omega t \right) \quad 0 \leq t \leq t_1 \quad (5.33)$$

Kaavasta (5.33) saadaan derivoimalla ajan suhteen nopeudelle lauseke

$$\dot{x}(t) = \frac{F_0}{k} \left( \frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_1} \cos \omega t \right) \quad 0 \leq t \leq t_1 \quad (5.34)$$

Vakiot  $B_1$  ja  $B_2$  ratkaisussa (5.31) määritetään ehdoista

$$x(t_1) = \frac{F_0}{k} \left( 1 - \frac{1}{\omega t_1} \sin \omega t_1 \right) \quad \dot{x}(t_1) = \frac{F_0}{k} \left( \frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_1} \cos \omega t_1 \right) \quad (5.35)$$

joista saadaan tulokseksi

$$B_1 = \frac{F_0}{k\omega} \left( \frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_1} \cos \omega t_1 \right) \quad B_2 = -\frac{F_0}{k\omega t_1} \sin \omega t_1 \quad (5.36)$$

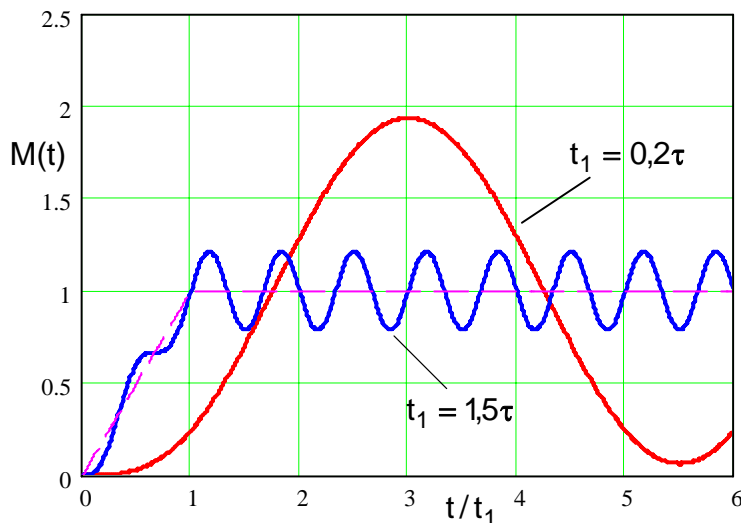
Kun vakiot  $B_1$  ja  $B_2$  sijoitetaan kaavaan (5.31) ja tulosta sievennetään trigonometri-an kaavojen avulla, saadaan ratkaisuksi aikavälillä  $t > t_1$

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \left\{ 1 + \frac{1}{\omega t_1} [\sin \omega(t - t_1) - \sin \omega t] \right\} \quad t > t_1 \quad (5.37)$$

Kaavoista (5.33) ja (5.37) ramppikuormituksen vahvistuskertoimelle  $M(t)$  tulee kaava

$$M(t) = \frac{x(t)}{F_0/k} = \begin{cases} \frac{t}{t_1} - \frac{1}{\omega t_1} \sin \omega t & 0 \leq t \leq t_1 \\ 1 + \frac{1}{\omega t_1} [\sin \omega(t - t_1) - \sin \omega t] & t > t_1 \end{cases} \quad (5.38)$$

Vahvistuskerron (5.38) on esitetty kuvassa 5.12 kuormituksen nousuajan  $t_1$  arvoilla  $0,2\tau$  ja  $1,5\tau$ , jossa  $\tau$  on ominaisvärähdysaika. Kuvaajista voidaan päätellä, että  $M_{\max}$  on sitä suurempi, mitä pienempi on nousuaika  $t_1$ . Ääritapauksessa  $t_1 = 0$  on

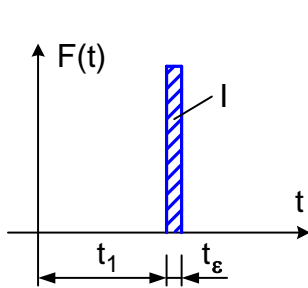


Kuva 5.12 Vahvistuskerron.

$M_{\max} = 2$ , jolloin kyseessä on askelkuormitus. Jos  $t_1 \gg \tau$ , on ylilyönti staattisesta siirtymästä  $F_0/k$  pieni. Jos nousuaika  $t_1$  on suuruusluokkaa  $3\tau$ , voidaan kuormitusta pitää staattisena ja dynaamiset vaikutukset jättää huomioonottamatta.

### 5.3.4 Impulssikuormitus

Impulssikuormitus on kuvan 5.13 kuormitustilanne, jossa systeemiin vaikuttaa hetkellä  $t_1$  voima, jonka impulssi on  $I$ . Impulssin määritelmän mukaan on siis



Kuva 5.13 Impulssikuormitus.

$$I = \lim_{t_\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_1+t_\varepsilon} F(t) dt \quad (5.39)$$

Kun oletetaan, että impulssikuormituksen vaikutus hetki  $t_1 = 0$ , saadaan systeemin liikeyhtälöksi

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \begin{cases} F(t) & t = 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases} \quad (5.40)$$

Systeemi on ennen impulssikuormitusta levossa eli  $x(0^-) = 0$  ja  $\dot{x}(0^-) = 0$ . Liike on vapaata värähtelyä aikavälillä  $t > 0$  alkuehtojen  $x(0^+)$  ja  $\dot{x}(0^+)$  mukaisesti. Koska nopeus  $\dot{x}(t)$  on aina äärellinen, on siirtymä  $x(t)$  jatkuva. Tästä seuraa, että  $x(0^+) = x(0^-) = 0$ . Liikeyhtälöstä saadaan integroimalla aikavälillä  $[0, t_\varepsilon]$

$$m \frac{d}{dt}(\dot{x}) + c \frac{d}{dt}(x) + kx = F(t) \Rightarrow m d\dot{x} + c dx + kx dt = F(t) dt \Rightarrow \quad (5.41)$$

$$m[x(t_\varepsilon) - \dot{x}(0^-)] + c[x(t_\varepsilon) - x(0^-)] + \int_0^{t_\varepsilon} kx dt = \int_0^{t_\varepsilon} F(t) dt$$

Ottamalla huomioon alkuehdot  $x(0^-) = 0$  ja  $\dot{x}(0^-) = 0$  ja siirtymän  $x(t)$  jatkuvuus saadaan antamalla  $t_\varepsilon \rightarrow 0^+$  tulokseksi  $m\dot{x}(0^+) = I$ . Alkuehdot ovat siis hetkellä  $t = 0^+$

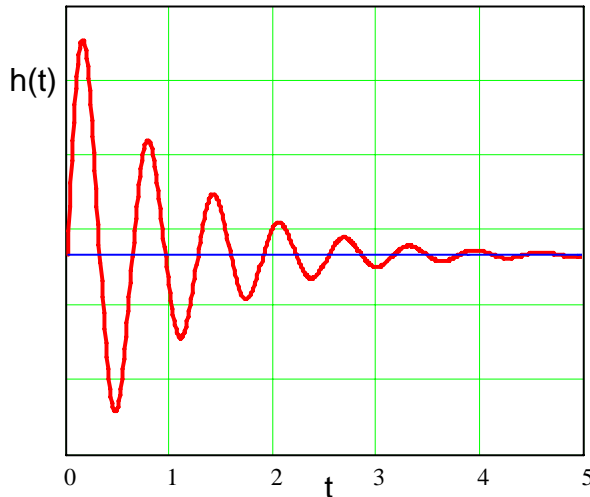
$$x(0^+) = 0 \quad \dot{x}(0^+) = I/m \quad (5.42)$$

Liikeyhtälön (5.40) ratkaisuksi aikavälillä  $t > 0$  tulee kaavojen (3.41) ja (5.42) perusteella alikriittisen vaimennuksen  $\zeta < 1$  tapauksessa

$$x(t) = \frac{I}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega t} \sin\omega_d t \quad (5.43)$$

Ratkaisua (5.43) sanotaan impulssivasteeksi. Jos erityisesti  $I = 1$ , on kyseessä yksimpulssivaste  $h(t)$

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega t} \sin\omega_d t \quad (5.44)$$



Kuva 5.14 Impulssikuormitus.

Kuvassa 5.14 on tyypillinen yksösimpulssivasteen kuvaaja.

Jos vaimennusta ei ole, on  $\zeta = 0$  ja  $\omega = \omega_d$ , jolloin impulssivaste ja yksikköimpulssivaste ovat

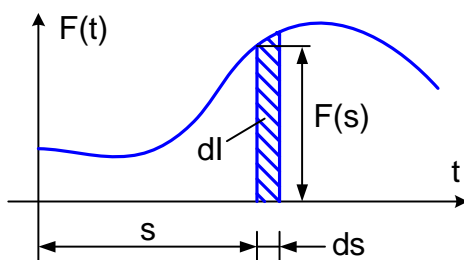
$$x(t) = \frac{l}{m\omega} \sin \omega t \quad (5.45)$$

$$h(t) = \frac{1}{m\omega} \sin \omega t \quad (5.46)$$

## 5.4 Duhamelin integraali

Käyttämällä hyväksi edellä esitettyä impulssikuormitusta vastaavaa siirtymävastetta (5.43) voidaan kehittää yleisempien kuormitusfunktioiden käsittelyyn sopiva analyyttinen ratkaisumenetelmä. Tätä menetelmää sanotaan Duhamelin integraaliksi. Sen avulla on mahdollista löytää siirtymävasteen analyyttinen ratkaisu monessa tapauksessa. Kovin mutkikkaiden kuormitusfunktioiden käsittelyyn ei Duhamelin integraali kuitenkaan sovellu, sillä matemaattiset lausekkeet tulevat tällöin liian hankaliksi ja ainoastaan numeerinen ratkaisu on mahdollinen.

Duhamelin integraali perustuu yhteenlaskuperiaatteeseen, joten menetelmää voidaan soveltaa vain lineaarisille systeemeille. Tarkastellaan kuvassa 4.10 esitettyä jousi-massa-vaimennin systeemiä, joka on aluksi levossa, kunnes siihen vaikuttaa kuvan 5.15 mukainen kuormitusheräte. Kuormitus voidaan tulkita sarjaksi peräkkäisiä impulssikuormituksia, joista kuvassa on esitetty mielivaltaista hetkeä  $t = s$  vastaava impulssi



Kuva 5.15 Duhamelin integraali.

$$dl = F(s) ds \quad (5.47)$$

Tästä aiheutuu systeemiin siirtymävaste  $dx(t)$ , joka saadaan kaavasta (5.43) ottamalla huomioon, että impulssi vaikuttaa hetkellä  $t = s$ . Tulos on

$$dx(t) = \frac{F(s) ds}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega(t-s)} \sin \omega_d(t-s) \quad (5.48)$$

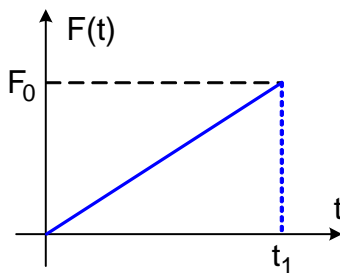
Koko siirtymävaste  $x(t)$  ajan hetkellä  $t$  saadaan laskemalla yhteen ennen hetkeä  $t$  tulleiden impulssien vaikutukset. Tämä merkitsee sitä, että kaavassa (5.48) integroidaan muuttujan  $s$  suhteen välillä  $0 \rightarrow t$ , jolloin siis  $t$  on integroitaessa vakio. Näin saadaan siirtymävasteen laskemiseksi Duhamelin integraali

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t F(s) e^{-\zeta\omega(t-s)} \sin\omega_d(t-s) ds \quad (5.49)$$

Jos vaimennusta ei ole, on  $\zeta = 0$  ja  $\omega_d = \omega$  ja kaava (5.49) yksinkertaistuu muotoon

$$x(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t F(s) \sin\omega(t-s) ds \quad (5.50)$$

Kaavoja (5.49) ja (5.50) voidaan soveltaa siirtymävasteen laskentaan, jos systeemi on hetkellä  $t=0$  levossa. Jos alkuehdot  $x(0)$  ja  $\dot{x}(0)$  ovat nolasta poikkeavat, on ratkaisuun (5.49) lisättävä kaavan (3.41) mukainen termi ja ratkaisuun (5.50) kaavan (3.7) mukainen termi.



Kuva 5.16 Kolmiopulssi.

Sovelletaan Duhamelin integraalia kuvan 5.16 mukaista kolmiopulssikuormitusta vastaavan siirtymävasteen laskentaan, kun vaimennusta ei ole ja systeemin alkuehdot ovat nollia. Kuormitusfunktion lauseke on

$$F(t) = \begin{cases} F_0 t/t_1 & 0 \leq t \leq t_1 \\ 0 & t > t_1 \end{cases} \quad (5.51)$$

Kaavasta (5.50) seuraa vasteeksi aikavälillä  $0 \leq t \leq t_1$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F_0}{m\omega t_1} \int_0^t s \sin\omega(t-s) ds = \frac{F_0}{k t_1} \int_0^t \omega s \sin\omega(t-s) ds \\ &= \frac{F_0}{k t_1} \left( \sin\omega t \int_0^t \omega s \cos\omega s ds - \cos\omega t \int_0^t \omega s \sin\omega s ds \right) \end{aligned} \quad (5.52)$$

jolloin on sovellettu ominaiskulmataajuuden määritelmää ja sinin vähennyslaskukaavaa. Vasteen  $x(t)$  lausekkeessa olevat integraalit voidaan laskea osittaisintegroinnilla tai katsoa taulukosta. Rajojen sijoittamisen jälkeen saadaan tulokset

$$\int_0^t \omega s \cos\omega s ds = t \sin\omega t + \frac{1}{\omega} \cos\omega t - \frac{1}{\omega} \quad \text{ja} \quad \int_0^t \omega s \sin\omega s ds = -t \cos\omega t + \frac{1}{\omega} \sin\omega t \quad (5.53)$$

Kun saadut tulokset sijoitetaan vasteen  $x(t)$  lausekkeeseen ja tulosta sievennetään, saadaan lopputulos

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \left( \frac{t}{t_1} - \frac{1}{\omega t_1} \sin \omega t \right) \quad 0 \leq t \leq t_1 \quad (5.54)$$

Tulos (5.54) on sama kuin ramppikuormituksen tarkastelun yhteydessä saatu kaava (5.33), kuten pitääkin. Aikavälille  $t > t_1$  saadaan vastaavasti

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega t_1} \int_0^{t_1} s \sin \omega(t-s) ds + 0 \quad (5.55)$$

sillä  $F(t) = 0$ , kun  $t > t_1$ . Integraali on rajaa  $t_1$  lukuun ottamatta sama kuin edellä alueella  $0 \leq t \leq t_1$ . On selvää, että vasteen  $x(t)$  lausekkeeksi tulee

$$x(t) = \frac{F_0}{k t_1} \left[ \sin \omega t \left( t_1 \sin \omega t_1 + \frac{1}{\omega} \cos \omega t_1 - \frac{1}{\omega} \right) - \cos \omega t \left( -t_1 \cos \omega t_1 + \frac{1}{\omega} \sin \omega t_1 \right) \right] \quad (5.56)$$

Tämä saadaan trigonometrian avulla muotoon

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \left[ \cos \omega(t-t_1) + \frac{1}{t_1 \omega} \sin \omega(t-t_1) - \frac{1}{t_1 \omega} \sin \omega t \right] \quad t > t_1 \quad (5.57)$$

Esimerkistä näkyy Duhamelin integraalin heikkous. Melko yksinkertaisistakin kuormitusmalleista seuraavat hankalat laskut. Perustapaukset löytyvät kylläkin valmiina kirjallisuudesta. Jos kuormitusfunktioista tunnetaan vain mittaustuloksia tiettyinä ajan hetkinä, on Duhamelin integraali mahdollista laskea vain numeerisesti.