

## 6 USEAN VAPAUASASTEEN SYSTEEMIN LIIKEYHTÄLÖT

### 6.1 Johdanto

Usean vapausasteen systeemin liiketilan kuvaamiseen tarvitaan kaksi tai useampia koordinaatteja. Koordinaatteina voivat olla sekä translaatiot että rotaatiot. Vapausasteiden lukumäärä tarkoittaa riippumattomien koordinaattien lukumäärää, joka tarvitaan ilmoitettaessa systeemin liiketila mielivaltaisella hetkellä.

Usean vapausasteen systeemin analysointi edellyttää sen liikeyhtälöiden tuntemista. Liikeyhtälöihin sisältyvät systeemin massa-, vaimennus- ja jäykkyysominaisuudet sekä ulkoiset kuormitukset. Tehtävät luokitellaan sen mukaan, millaisia kuormitustermejä liikeyhtälössä on. Jos kuormitukset tunnetaan ajan funktiona, on kuormitus deterministinen ja seurauksena oleva liiketila on deterministinen. Mikäli kuormitus on satunnainen, seurauksena olevaa liiketilaa voidaan tarkastella vain satunnaisena suurena tilastomatematiikalla. Tässä tarkastellaan vain deterministisiä kuormituksia.

Jos liikeyhtälöissä ei ole kuormitustermejä, kyseessä ovat ominaisvärähtelyn liikeyhtälöt. Ominaisvärähtely on systeemin vapaata värähtelyä ilman kuormitusten vaikutusta ja se riippuu vain systeemin massa-, vaimennus- ja jäykkyysominaisuuksista sekä alkuehdoista. Ominaisvärähtelyn liikeyhtälöistä ratkeavat systeemin ominaistajuudet ja -muodot. Jos vapausasteiden määrä on  $n$ , on ominaistajuuksiakin  $n$  kappaletta. Kutakin ominaistajuutta vastaa systeemin värähtelymuoto, jota kutsutaan ominaisuodoksi tai normaalimuodoksi. Matematiikassa vastaavat käsitteet esiintyvät yleisempinä ja niitä sanotaan ominaisarvoiksi ja ominaisvektoreiksi.

Kun usean vapausasteen systeemiin vaikuttaa kuormituksia, sanotaan sille syntyvää liiketilaa pakotetuksi. Yksinkertaisin kuormitus on tietyllä taajuudella vaihteleva harmoninen kuormitus, jolloin syntyvä liike on harmonista pakkovärähtelyä herätteen taajuudella. Jos herätteen taajuus on sama kuin systeemin jokin ominaistajuus, seurauksena on resonanssi, jolloin värähtelyamplitudit kasvavat suuriksi. Tavallinen kuormitustapaus sovelluksissa on jaksollinen eli säännöllisin väliajoin samanlaisena toistuva kuormitus. Jaksollinen kuormitus voidaan jakaa harmonisiin komponentteihin, jonka jälkeen voidaan soveltaa harmonisen herätteen teoriaa ja yhteenlaskuperiaatetta. Lyhytkestoista tai äkillistä kuormituksista aiheutuu systeemiin lyhytkestoisia värähtelyitä maksimiampplitudin ollessa vastaavaa staattista siirtymää suurempi.

Systeemissä esiintyvät erityyppiset kitkavaikutukset aiheuttavat vaimennusta, joka pienentää värähtelyjen amplitudia ja transienttikuormitusten aiheuttamia maksimi siirtymiä. Vaimennuksen analyttinen käsittely on usean vapausasteen systeemeissä hankalaa johtuen vaimennusilmion mutkikkaasta luonteesta. Usein vaimennus käsitellään likimääräisesti olettamalla eri ominaisuotojen vaimennukset kytkemättömiksi tai käyttämällä Rayleighin suhteellisen vaimennuksen mallia, jolloin oletetaan vaimennuksen olevan yhteydessä systeemin massa- ja jäykkyysominaisuuksiin.

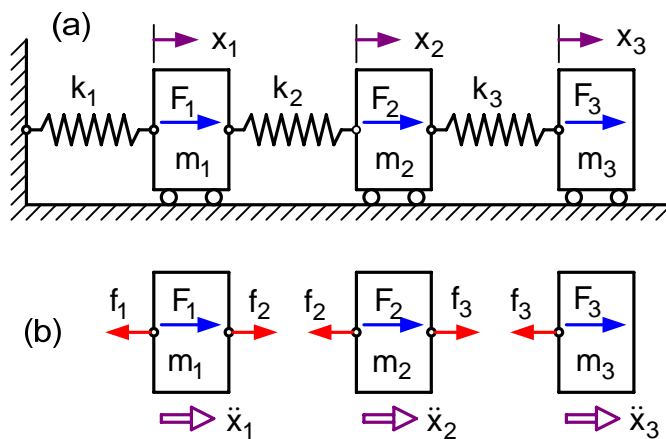
Pakotetun liiketilän analysointi edellyttää yleensä vastaavan ominaisvärähtelytehtävän ratkaisun tuntemista. Tärkeimmät ratkaisumenetelmät ovat normaalimuotomenetelmä ja suorat aikaintegrointimenetelmät. Normaalimuotomenetelmässä ratkaisu muodostetaan ominaismuotojen lineaarikombinaationa. Aikaintegrointimenetelmissä liikeyhtälöille etsitään likiratkaisu diskreetteinä ajan hetkinä pieniä aika-askelaita käyttäen. Riittävään tarkkuuteen pääseminen vaatii tarpeeksi pientä aika-askelta ja ratkaisun tehokkuuden kannalta aika-askel ei saa olla liian pieni. Sopivan aika-askelen valinnassa voidaan käyttää hyväksi systeemin pienintä ominaisvärähdysaikaa.

Seuraavassa esitetään liikeyhtälöiden kirjoittamiseen käytettävissä olevat menetelmät ja niiden ratkaisemiseen oleellisesti vaikuttavat ominaisuudet.

## 6.2 Newtonin lakien käyttö

Usean vapausasteen systeemin liikeyhtälöt voidaan johtaa käyttämällä suoraan Newtonin lakeja perusmuodossa. Tällöin systeemin osista laaditaan sopiva määrä vapaakappalekuvia, joista kirjoitetaan tarpeellinen määrä voima- ja momenttiliikeyhtälöitä ja lopuksi yhtälöt sievennetään ja järjestetään koordinaattien mukaisesti yhtälöryhmäksi. Liikeyhtälöryhmässä on vapausasteiden lukumäärän osoittama määrä yhtälöitä. Lineaarisen systeemin liikeyhtälöryhmässä on vain koordinaattien ja niiden aikaderivaattojen (nopeudet ja kiihtyvyydet) ensimmäisen asteen lausekkeita. Epälineaarisen systeemin liikeyhtälöt sisältävät koordinaattien ja/tai niiden aikaderivaattojen epälineaarisia termejä, jolloin ratkaiseminen on oleellisesti hankalampaa. Tässä tarkastellaan vain lineaarisia systeemejä. Seuraavassa esitetään esimerkkejä usean vapausasteen systeemin liikeyhtälöiden kirjoittamisesta Newtonin lakeja käyttäen, kun vapausasteita on vain muutamia.

### 6.2.1 Esimerkki 1



Tarkastellaan kuvan 6.1 (a) kolmen vapausasteen jousi-massa systeemiä. Sen tilaa kuvaaviksi koordinaateiksi valitaan massojen asemat  $x_1$ ,  $x_2$  ja  $x_3$  mitattuna tasapainoasemasta, jossa jouset ovat venymättömiä. Kuvassa 6.1 (b) on vapaakappalekuvat, joista voidaan kirjoittaa kullekin massalle vaakasuunnassa liikeyhtälö. Tulokseksi saadaan liikeyhtälöryhmä

Kuva 6.1 Esimerkki 1.

$$\begin{cases} F_1 + f_2 - f_1 = m_1 \ddot{x}_1 \\ F_2 + f_3 - f_2 = m_2 \ddot{x}_2 \\ F_3 - f_3 = m_3 \ddot{x}_3 \end{cases} \quad (6.1)$$

Jousivoimien lausekkeet ovat koordinaattien avulla esitettyinä

$$f_1 = k_1 x_1 \quad f_2 = k_2 (x_2 - x_1) \quad f_3 = k_3 (x_3 - x_2) \quad (6.2)$$

Sijoittamalla jousivoimat liikeyhtälöihin ja järjestelemällä termejä seuraa tulos

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = F_1(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3 x_3 = F_2(t) \\ m_3 \ddot{x}_3 - k_3 x_2 + k_3 x_3 = F_3(t) \end{cases} \quad (6.3)$$

jotka ovat systeemin liikeyhtälöt. Tarkasteltavana on kolmen vapausasteen systeemi, joten liikeyhtälöiksi tulee kolmen tavallisen differentiaaliyhtälön ryhmä. Siinä esiintyy tuntemattomien siirtymien  $x_1$ ,  $x_2$  ja  $x_3$  kertaluvun nolla ja kaksi aikaderivaattoja ensimmäisessä potenssissa, joten kyseessä on toisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälöryhmä. Kirjoittamalla liikeyhtälöryhmä matriisimuotoon saadaan

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \end{Bmatrix} \quad (6.4)$$

tai tiiviimmin kirjoitettuna

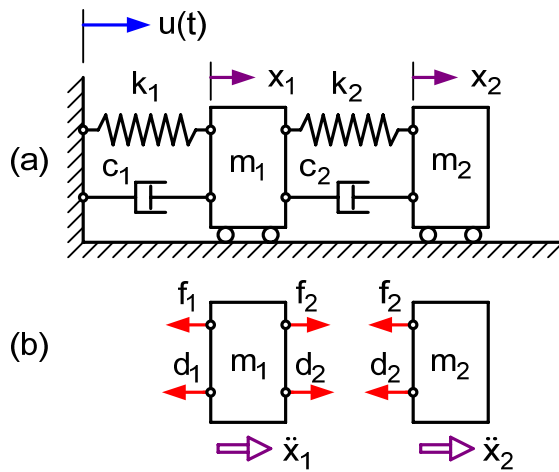
$$[M] \{\ddot{x}\} + [K] \{x\} = \{F(t)\} \quad (6.5)$$

$[M]$  on systeemin massamatriisi,  $[K]$  jäykkyydematriisi,  $\{\ddot{x}\}$  kiihtyvyydevektori  $\{x\}$  siirtymävektori ja  $\{F(t)\}$  kuormitusvektori. Liikeyhtälöistä (6.5) nähdään, että massamatriisi on lävistäjämatriisi, mutta jäykkyydematriisin ei ole, joten liikeyhtälöt ovat jäykkyydematriisin kautta kytkettyjä. Tällaista kytkentää sanotaan staattiseksi kytkennäksi.

### 6.2.2 Esimerkki 2

Tarkastellaan kuvan 6.2 (a) kahden vapausasteen systeemiä, jossa kuormituksena on alustan vaakaliike tunnetun funktion  $u(t)$  mukaisesti. Koordinaatit  $x_1$  ja  $x_2$  ilmaisevat massojen absoluuttiset asemat vaakatasolla. Määritellään suhteelliset koordinaatit  $z_1$  ja  $z_2$  yhtälöillä

$$z_1 = x_1 - u \quad z_2 = x_2 - u \quad \Rightarrow \quad x_1 = z_1 + u \quad x_2 = z_2 + u \quad (6.6)$$



Kuva 6.2 Esimerkki 2.

jolloin ne ovat massojen asemat alustaan nähden. Vapaakappalekuvista 6.2 (b) saadaan liikeyhtälöt

$$\begin{cases} -f_1 - d_1 + f_2 + d_2 = m_1 \ddot{x}_1 \\ -f_2 - d_2 = m_2 \ddot{x}_2 \end{cases} \quad (6.7)$$

Määritelmästä (6.6) seuraa absoluuttisille nopeuksille ja kiihtyvyyksille lausekkeet

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{z}_1 + \dot{u} & \dot{x}_2 &= \dot{z}_2 + \dot{u} \\ \ddot{x}_1 &= \ddot{z}_1 + \ddot{u} & \ddot{x}_2 &= \ddot{z}_2 + \ddot{u} \end{aligned} \quad (6.8)$$

Jousi- ja vaimennusvoimille voidaan kirjoittaa koordinaattien avulla lausekkeet

$$\begin{aligned} f_1 &= k_1(x_1 - u) = k_1 z_1 & f_2 &= k_2(x_2 - x_1) = k_2(z_2 - z_1) \\ d_1 &= c_1(\dot{x}_1 - \dot{u}) = c_1 \dot{z}_1 & d_2 &= c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = c_2(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) \end{aligned} \quad (6.9)$$

Sijoittamalla tulokset (6.8) ja (6.9) kaavaan (6.7) saadaan

$$\begin{cases} -k_1 z_1 - c_1 \dot{z}_1 + k_2(z_2 - z_1) + c_2(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) = m_1(\ddot{z}_1 + \ddot{u}) \\ -c_2(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) - k_2(z_2 - z_1) = m_2(\ddot{z}_2 + \ddot{u}) \end{cases} \quad (6.10)$$

Termejä järjestelemällä liikeyhtälöt menevät muotoon

$$\begin{cases} m_1 \ddot{z}_1 + c_1 \dot{z}_1 + k_1 z_1 - c_2(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) - k_2(z_2 - z_1) = -m_1 \ddot{u} \\ m_2 \ddot{z}_2 + c_2(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + k_2(z_2 - z_1) = -m_2 \ddot{u} \end{cases} \quad (6.11)$$

joka voidaan laittaa seuraavaan matriisimuotoon

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -m_1 \ddot{u} \\ -m_2 \ddot{u} \end{Bmatrix} \quad (6.12)$$

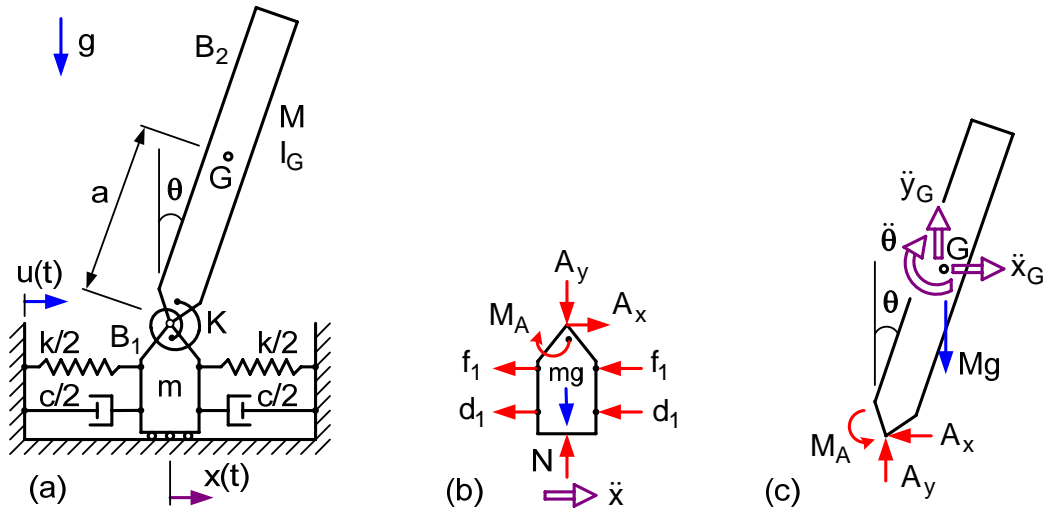
eli tiiviimmin kirjoitettuna

$$\boxed{[M] \{\ddot{z}\} + [C] \{\dot{z}\} + [K] \{z\} = \{F(t)\}} \quad (6.13)$$

Yhtälössä (6.13)  $[C]$  on vaimennusmatriisi ja  $\{\ddot{z}\}$ ,  $\{\dot{z}\}$  ja  $\{z\}$  suhteellinen kiihtyvyy-, nopeus- ja siirtymävektori. Suhteellisia koordinaatteja käytettäessä kuormitusvektorissa  $\{F(t)\}$  esiintyy vain alustan kiihtyvyys  $\ddot{u}$ , joka on helpompi mitata kuin  $u$  tai  $\dot{u}$ . Liikeyhtälöt ovat sekä jäykkyy- että vaimennusmatriisin kautta kytketyt eli staattisen kytkennän lisäksi niissä on vaimennuskytkentä.

### 6.2.3 Esimerkki 3

Tarkastellaan kuvan 6.3 (a) laskentamallia, jolla voidaan tutkia maaperän liikkeestä  $u(t)$  aiheutuvaa rakennuksen värähtelyä. Laskentamallissa rakennusta kuvataan jäykällä kappaleella  $B_2$  ja perustusta partikkelilla  $B_1$ . Koordinaateiksi valitaan perustuksen absoluuttinen vaakasuora asema  $x(t)$  ja rakennuksen kulma-asema  $\theta(t)$ , jolloin kyseessä on kahden vapausasteen malli. Oletetaan vielä liikkeiden olevan pieniä.



Kuva 6.3 Esimerkki 3.

Perustuksen vapaakappalekuvasta 6.3 (b) saadaan vaakasuuntainen liikeyhtälö

$$\rightarrow -2f_1 - 2d_1 + A_x = m\ddot{x} \quad (6.14)$$

Perustuksen pystysuuntaista liikeyhtälöä ei jatkossa tarvita. Rakennuksen vapaakappalekuvasta 3 (c) saadaan seuraavat kolme liikeyhtälöä

$$\rightarrow -A_x = M\ddot{x}_G \quad \uparrow A_y - Mg = M\ddot{y}_G \quad (6.15)$$

$$\curvearrowright_G: -M_A + A_y a \sin\theta + A_x a \cos\theta = I_G \ddot{\theta} \quad (6.16)$$

Jousivoimalle, vaimennusvoimalle ja kierukkajousen momentille pätevät lausekkeet

$$f_1 = \frac{k}{2}(x - u) \quad d_1 = \frac{c}{2}(\dot{x} - \dot{u}) \quad M_A = K\theta \quad (6.17)$$

Koska kulma  $\theta$  on pieni, voidaan käyttää arvioita  $\sin\theta \approx \theta$  ja  $\cos\theta \approx 1$ . Massakeskiön asemakoordinaatit  $x_G$  ja  $y_G$  voidaan lausua koordinaattien  $x$  ja  $\theta$  avulla

$$x_G = x + a \sin\theta \approx x + a\theta \quad y_G = a \cos\theta \approx a \Rightarrow \ddot{x}_G = \ddot{x} + a\ddot{\theta} \quad \ddot{y}_G = 0 \quad (6.18)$$

Ottamalla edellä esitetyt tulokset huomioon perustuksen liikeyhtälössä (6.14) ja rakennuksen momenttiliikeyhtälössä (6.16) saadaan liikeyhtälöpari

$$\begin{cases} -k(x-u) - c(\dot{x} - \dot{u}) - M(\ddot{x} + a\ddot{\theta}) = m\ddot{x} \\ -K\theta + Mga\theta - M(\ddot{x} + a\ddot{\theta})a = I_G \ddot{\theta} \end{cases} \quad (6.19)$$

eli matriisimuodossa

$$\begin{bmatrix} M+m & Ma \\ Ma & I_G + Ma^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & K - Mga \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c\dot{u} + ku \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.20)$$

tai lyhyemmin kirjoitettuna

$$[M] \{\ddot{y}\} + [C] \{\dot{y}\} + [K] \{y\} = \{F(t)\} \quad (6.21)$$

Alustan liike näkyy liikeyhtälössä (6.20) oikealla puolella olevana kuormitusvektorina  $\{F(t)\}$ . Absoluuttisia koordinaatteja käytettäessä kuormitusvektorissa esiintyvät alustan asema  $u$  ja nopeus  $\dot{u}$ . Liikeyhtälöt ovat sekä massa- että vaimennusmatriisin kautta kytketyt. Massamatriisin kautta syntyvää kytkentää sanotaan dynaamiseksi.

### 6.3 Liikeyhtälöiden yleinen muoto

Edellä esitetyistä esimerkeistä nähdään, että  $n$  vapausastetta omaavan lineaarisen mekaanisen systeemin liikeyhtälöt voidaan esittää matriisimuodossa

$$[M] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \{F\} \quad (6.22)$$

- $[M]$   $n \times n$  – massamatriisi, sisältää systeemin inertiaominaisuudet
- $[C]$   $n \times n$  – vaimennusmatriisi, sisältää systeemin vaimennusominaisuudet
- $[K]$   $n \times n$  – jäykkyyssmatriisi, sisältää systeemin jäykkyyssominaisuudet
- $\{\ddot{x}\}$   $n \times 1$  – kiihtyvyyssvektori, alkioit ovat kiihtyvyyksiä tai kulmakiihtyvyyksiä
- $\{\dot{x}\}$   $n \times 1$  – nopeusvektori, alkioit ovat nopeuksia tai kulmanopeuksia
- $\{x\}$   $n \times 1$  – asemavektori, alkioit ovat asemia ja kulma-asemia
- $\{F\}$   $n \times 1$  – pakkovoimavektori, alkioit ovat ulkoisia kuormituksia

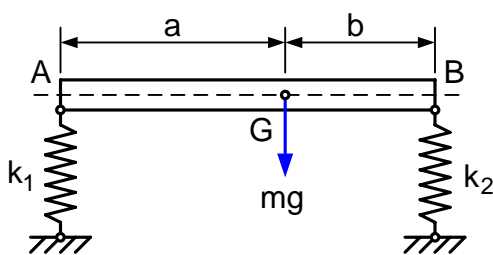
Liikeyhtälöryhmä (6.22) voidaan muodostaa sopivien vapaakappalekuvien avulla Newtonin lakeja käyttäen, kuten edellisen kohdan esimerkeistä ilmeni. Toinen mahdollisuus on energiaperiaatteen käyttö, kuten myöhemmin esitetään.

Yhtälöryhmässä (6.22) on systeemin vapausasteiden mukainen määrä yhtälöitä. Nämä yhtälöt ovat yleensä kytkettyjä eli ainakin joissakin yhtälöissä esiintyy useampia kuin yksi koordinaateista. Yhtälöitä (6.4) ei siis voi ratkaista erillisinä, vaan ratkaisu on suoritettava yhtälöryhmänä. Kyseessä on tavallisten toisen kertaluvun lineaaristen differentiaaliyhtälöiden ryhmä, joten yksikäsitteisen ratkaisun löytäminen edellyttää myös systeemin alkuehtojen tuntemista. Tämä merkitsee sitä, että on tunnettava jokaisen koordinaatin ja sen ensimmäisen aikaderivaatan alkuarvo.

Jos liikeyhtälöiden (6.22) oikealla puolella oleva kuormitusvektori  $\{F\}$  on nollavektori, on kyseessä ominaisvärähtelyiden liikeyhtälöryhmä ja muuten pakotetun liikkeen yhtälöryhmä. Ominaisvärähtelyjen liikeyhtälöryhmästä ratkeaa systeemin vapausasteiden mukainen määrä ominaistajuuksia ja kuhunkin ominaistajuuteen liittyvä ominaismuoto. Ominaisajuuksien tunteminen on tärkeää pyrittäessä välttämään värähtelyongelmia. Ominaisvärähtelytehtävän ratkaisua voidaan hyödyntää pakotetun liikkeen ratkaisemisessa. Normaalimuotomenetelmässä ominaisvärähtelytehtävän ratkaisu on välttämätön ja muissakin ratkaisutavoissa voidaan sitä käyttää hyväksi.

## 6.4 Liikeyhtälöiden kytkentä

Usean vapausasteen systeemin liikeyhtälöryhmä on yleensä kytketty. Matriisimuotoon kirjoitetussa yhtälöryhmässä tämä tarkoittaa sitä, että vähintään yksi systeemin perusmatriiseista  $[M]$ ,  $[C]$  ja  $[K]$  ei ole lävistäjämatriisi. Jos systeemin massamatriisi  $[M]$  ei ole lävistäjämatriisi, sanotaan systeemin olevan dynaamisesti kytketty. Jos taas jäykkymatriisi  $[K]$  ei ole lävistäjämatriisi, on kytkentä staattinen. Kytkentä voi esiintyä myös vaimennusmatriisissa  $[C]$ , jolloin systeemissä on vaimennuskytkentä.

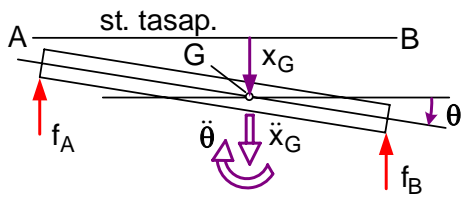


Kuva 6.4 Palkki.

Kytkentään vaikuttavien tekijöiden selvittämiseksi tarkastellaan vaimenematonta ominaisvärähtelyä kuvan 6.4 esimerkin avulla. Esimerkissä tutkitaan jäykkää palkkia AB, jonka massakeskiö G ei ole palkin keskellä eli  $a \neq b$ . Palkki on tuettu kahdella jousella, joiden jousivakiot ovat  $k_1$  ja  $k_2$ . Palkin massa on  $m$  ja hitausmomentti massakeskiön suhteen  $I_G$ . Kyseessä on jäykän kappaleen tasoliike, joten vapausasteita on kaksi eli palkin liiketilan kuvaamiseen tarvitaan kaksi koordinaattia.

Kytkentään vaikuttavien tekijöiden selvittämiseksi tarkastellaan vaimenematonta ominaisvärähtelyä kuvan 6.4 esimerkin avulla.

1. Valitaan aluksi koordinaateiksi massakeskiön pystysiirtymä  $x_G$  ja palkin rotaatiokulma  $\theta$  mitattuna palkin staattisesta tasapainoasemasta kuvan 6.5 mukaisesti, jolloin jousien staattisiin pituudenmuutoksiin liittyvät voimat kumoavat painovoiman vaikutuksen liikeyhtälöissä. Oletetaan lisäksi siirtymät pieniksi, jolloin  $\sin \theta \approx \theta$ . Jousivoimien lausekkeet ovat

Kuva 6.5. Koordinaatit  $x_G$  ja  $\theta$ .

$$\begin{aligned} f_A &= k_1(x_G - a\theta) \\ f_B &= k_2(x_G + b\theta) \end{aligned} \quad (6.23)$$

Kuvasta 6.5 saadaan liikeyhtälöt

$$\downarrow m\ddot{x}_G = -f_A - f_B \quad (6.24)$$

$$\curvearrowright G: -I_G\ddot{\theta} = -f_A a + f_B b \quad (6.25)$$

Sijoittamalla jousivoimat liikeyhtälöihin ja järjestelemällä termejä saadaan

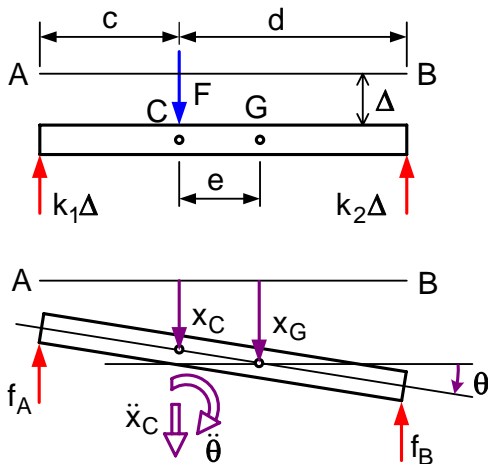
$$\begin{aligned} m\ddot{x}_G + (k_1 + k_2)x_G + (-k_1 a + k_2 b)\theta &= 0 \\ I_G\ddot{\theta} + (-k_1 a + k_2 b)x_G + (k_1 a^2 + k_2 b^2)\theta &= 0 \end{aligned} \quad (6.26)$$

jotka voidaan kirjoittaa matriisimuotoon

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_G \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_1 a + k_2 b \\ -k_1 a + k_2 b & k_1 a^2 + k_2 b^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_G \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.27)$$

Havaitaan, että liikeyhtälöillä (6.27) on staattinen kytkentä.

2. Palkilta AB löytyy piste C, johon sijoitetusta staattisesta pistevoimasta F aiheutuu palkille pelkästään translaatiosiirtymä  $\Delta$  kuvan 6.6 mukaisesti. Tällöin palkin momenttitasapainosta pisteen C suhteen seuraa, että  $k_1 c = k_2 d$ .

Kuva 6.6 Koordinaatit  $x_C$  ja  $\theta$ .Valitaan koordinaateiksi pisteen C pystysiirtymä  $x_C$  ja palkin rotaatiokulma  $\theta$  mitattuna staattisesta tasapainoasemasta. Jousivoimien lausekkeet ovat

$$f_A = k_1(x_C - c\theta) \quad (6.28)$$

$$f_B = k_2(x_C + d\theta)$$

Palkin pystysuuntainen voimaliikkeyhtälö ja momenttiliikkeyhtälö pisteen C suhteen ovat

$$\downarrow m\ddot{x}_G = -f_A - f_B \quad (6.29)$$

$$\curvearrowright C: -I_G\ddot{\theta} - m\ddot{x}_G e = -f_A c + f_B d \quad (6.30)$$

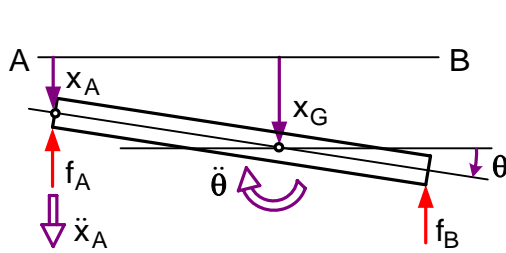
Kuvan 6.6 perusteella pienillä siirtymillä on  $x_C = x_G - e\theta$ , josta seuraa  $x_G = x_C + e\theta$  ja  $\ddot{x}_G = \ddot{x}_C + e\ddot{\theta}$ . Steinerin säännön mukaan on  $I_C = I_G + me^2$ . Sijoittamalla nämä tiedot liikeyhtälöihin (6.29) ja (6.30) ja ottamalla huomioon yhteys  $k_1 c = k_2 d$  saadaan liikeyhtälöille seuraava matriisimuoto



$$\begin{bmatrix} m & me \\ me & I_C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_C \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & 0 \\ 0 & k_1 c^2 + k_2 d^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_C \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.31)$$

Liiketytälöillä (6.31) on dynaaminen, mutta ei staattista kytkentää.

3. Kirjoitetaan vielä palkin liiketytälöt, kun koordinaateiksi valitaan pisteen A pystysiirtymä  $x_A$  ja rotaatiokulma  $\theta$  mitattuna staattisesta tasapainoasemasta kuvan 6.7 mukaisesti. Jousivoimien lausekkeet ovat



Kuva 6.7. Koordinaatit  $x_A$  ja  $\theta$ .

$$\begin{aligned} f_A &= k_1 x_A \\ f_B &= k_2 [x_A + (a+b)\theta] \end{aligned} \quad (6.32)$$

Palkin pystysuuntainen voimaliiketytälö ja momenttiliiketytälö pisteen A suhteen ovat

$$\downarrow m \ddot{x}_G = -f_A - f_B \quad (6.33)$$

$$\curvearrowright A: -I_G \ddot{\theta} - m \ddot{x}_G a = f_B (a+b) \quad (6.34)$$

Lisäksi on voimassa  $x_A = x_G - a\theta$ , josta seuraa  $x_G = x_A + a\theta$  ja  $\ddot{x}_G = \ddot{x}_A + a\ddot{\theta}$  sekä  $I_A = I_G + ma^2$ . Kun otetaan huomioon nämä tiedot, saadaan liiketytälöt koordinaattien  $x_A$  ja  $\theta$  avulla matriisimuotoon

$$\begin{bmatrix} m & ma \\ ma & I_A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_A \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2(a+b) \\ k_2(a+b) & k_2(a+b)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_A \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.35)$$

Yhtälöillä (6.35) on sekä dynaaminen että staattinen kytkentä.

Esimerkistä näkyy, että kytkentä ei ole systeemin ominaisuus, vaan seuraus valituista koordinaateista. Voidaan osoittaa, että on mahdollista valita koordinaatit siten, että systeemissä ei ole staattista eikä dynaamista kytkentää, jolloin sekä jäykkyys- että massamatriisi ovat lävistämatriiseja. Näitä koordinaatteja sanotaan normaalikoordinaateiksi ja niillä on suuri merkitys värähtelyanalyysissä. Normaalikoordinaatteja ei voi keksiä suoraan, niiden löytäminen vaatii ominaiskulmataajuuksien ja -muotojen määrittämistä.

Myös vaimennetusta systeemistä voidaan poistaa staattinen ja dynaaminen kytkentä siirtymällä normaalikoordinaatteihin, mutta vaimennuskytkennän poistaminen näin on mahdollista vain erityistapauksissa tai käyttämällä tiettyjä oletuksia vaimennuksen luonteesta. Esimerkiksi suhteellisen vaimennuksen mallin tai Rayleighin vaimennusmallin käyttö tekee mahdolliseksi vaimennuskytkennän poistamisen.

## 6.5 Energiaperiaatteen käyttö

Kirjoitettaessa liikeyhtälöitä suoraan Newtonin laeista käytetään systeemistä irrotettujen osien tai osakokonaisuuksien vapaakappalekuvia, jolloin osien välillä vaikuttavat voimat ja momentit tulevat aluksi mukaan yhtälöihin. Lopullisiin liikeyhtälöihin pääseminen vaatii näiden sisäisten vaikutusten eliminointia, mikä saattaa olla työlästä.

Likeyhtälöiden kirjoittaminen on toisinaan yksinkertaisempaa, jos käytetään Newtonin lakien sijaista jotakin energiaperiaatetta. Tällöin tarkastellaan systeemin liike- ja potentiaalienergiaa ja ulkoisten kuormitusten työtä, joihin systeemin sisäiset voimat ja momentit eivät vaikuta. Seuraavassa tarkastellaan Lagrangen yhtälöitä, jotka ovat dynamiikan tehtävissä useimmiten energiaperiaatteiden käyttökelpoisin muoto.

### 6.5.1 Konservatiivisen systeemin Lagrangen yhtälöt

Dynamiikassa osoitetaan, että  $n$  vapausastetta omaavalle konservatiiviselle systeemille ovat voimassa Lagrangen yhtälöt

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_k} + \frac{\partial V}{\partial x_k} = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (6.36)$$

Kaavassa (6.36)  $T$  on systeemin liike-energia ja  $V$  potentiaalifunktio hetkellä  $t$ . Potentiaalifunktio  $V$  sisältää systeemin kimmoenergian ja ulkoisten konservatiivisten kuormitusten työn. Yhtälöitä (6.36) on  $n$  kappaletta ja ne muodostavat systeemin liikeyhtälöryhmän.

Liike-energia voi riippua asemakoordinaateista  $x_k$  ja niiden ensimmäisistä aikaderivaatoista  $\dot{x}_k$  (nopeudet ja kulmanopeudet) ja potentiaalifunktio koordinaateista  $x_k$  eli

$$T = T(x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) \quad V = V(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (6.37)$$

Funktioissa (2) on  $2n$  kappaletta muuttujia, sillä koordinaattien aikaderivaattoja  $\dot{x}_k$  pidetään tässä riippumattomina muuttujina.

Lagrangen yhtälöitä (6.37) voidaan käyttää myös epälineaaristen systeemien liikeyhtälöiden johtamiseen. Tässä rajoitutaan lineaaristen systeemien värähtelyiden tarkasteluun, jolloin Lagrangen yhtälöt antavat kaavan (6.22) mukaisen liikeyhtälöryhmän. Konservatiivisella systeemillä liikeyhtälöryhmässä ei ole vaimennustermejä. Lineaarisen värähtelymekaniikan sovelluksissa kineettinen energia ei riipu asemakoordinaateista  $x_k$  eli  $T = T(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n)$ , jolloin Lagrangen yhtälöissä (6.36) on vasemman puolen keskimäinen termi nolla.

### 6.5.2 Epäkonservatiivisen systeemin Lagrangen yhtälöt

Tarkastellaan  $n$  vapausastetta omaavaa mekaanista systeemiä, jonka vapausasteisiin  $x_1, x_2, \dots, x_n$  vaikuttavat epäkonservatiiviset kuormitukset  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ . Koordinaatit ovat translaatio- tai rotaatiosiiirtymiä, joten kuormitukset ovat voimia tai momentteja niin, että kuormituksen ja koordinaatin tulo edustaa työtä. Systeemin koordinaateissa tapahtuvia pieniä muutoksia  $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n$  sanotaan virtuaalisiksi siirtymiksi ja systeemi siirtyy niiden tapahtuessa alkuasemastaan uuteen asemaan  $x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, \dots, x_n + \delta x_n$ , jolloin ulkoiset kuormitukset tekevät systeemiin virtuaalisen työn

$$\delta W = \sum_{i=1}^n Q_i \delta x_i \quad (6.38)$$

Dynamiikassa osoitetaan, että tässä tapauksessa systeemin Lagrangen yhtälöt ovat

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_k} + \frac{\partial V}{\partial x_k} = Q_k \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (6.39)$$

Virtuaalisen työn avulla Lagrangen yhtälöitä voidaan käyttää yleisten epäkonservatiivisten voimavaikutusten huomioonottamiseen. Linearisessa värähtelymekaniikassa epäkonservatiivisinä voimina ovat yleensä viskoosit vaimennusvoimat ja niiden vaikutus voidaan ottaa kätevämmiin huomioon dissipatiofunktion  $D$  avulla. Dissipatiofunktio muodostetaan analogisesti jousien kimmoenergian kanssa. Kun vaimennusvoima on  $F_d = c \dot{x}$ , on sitä vastaava dissipatiofunktio  $D = c \dot{x}^2 / 2$ . Koko systeemin dissipatiofunktio saadaan yhteenlaskuperiaatteella. Kun dissipatiofunktio on muodostettu, saadaan termit  $Q_k$  siitä kaavalla

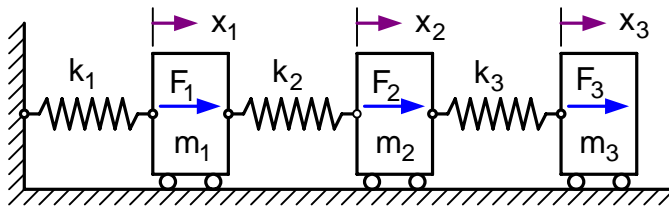
$$Q_k = - \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_k} \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (6.40)$$

Yhtälöt (6.39) saavat dissipatiofunktioita käytettäessä muodon

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_k} + \frac{\partial V}{\partial x_k} = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (6.41)$$

Lineaarisia värähtelyitä tarkasteltaessa kaavan (6.41) vasemman puolen toinen termi on nolla ja kolmas termi antaa liikeyhtälöryhmän (6.22) vaimennustermin. Lisäksi kaavan (6.41) vasemman puolen ensimmäinen termi antaa liikeyhtälöryhmän massa-termin ja neljäs jäykkyystermin.

## 6.5.3 Esimerkkejä



Kuva 6.8. Esimerkki 1.

**Esimerkki 1**

Johdetaan kuvan 1 vaimentamattoman kolmen vapausasteen systeemin liikeyhtälöt käyttäen Lagrangen yhtälöitä (6.36). Tämä esimerkkiä käsiteltiin kohdassa 6.2.1 Newtonin lakien avulla. Liike-energia  $T$  ja potentiaalifunktio  $V$  ovat

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2 \quad (6.42)$$

$$V = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k_3(x_3 - x_2)^2 - F_1x_1 - F_2x_2 - F_3x_3 \quad (6.43)$$

Liike-energia  $T$  riippuu vain nopeuksista  $\dot{x}_k$ , joten Lagrangen yhtälöissä termit  $\frac{\partial T}{\partial x_k}$

ovat nollia. Lasketaan nollasta poikkeavat derivaatat

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) &= \frac{d}{dt}(m_1\dot{x}_1) = m_1\ddot{x}_1 & \frac{\partial V}{\partial x_1} &= k_1x_1 - k_2(x_2 - x_1) - F_1 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) &= \frac{d}{dt}(m_2\dot{x}_2) = m_2\ddot{x}_2 & \frac{\partial V}{\partial x_2} &= k_2(x_2 - x_1) - k_3(x_3 - x_2) - F_2 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3}\right) &= \frac{d}{dt}(m_3\dot{x}_3) = m_3\ddot{x}_3 & \frac{\partial V}{\partial x_3} &= k_3(x_3 - x_2) - F_3 \end{aligned} \quad (6.44)$$

Sijoittamalla saadut tulokset Lagrangen yhtälöihin, saadaan liikeyhtälöryhmä

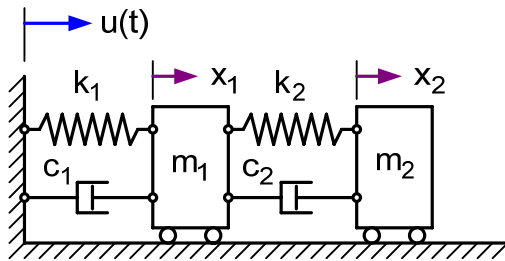
$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 - k_2(x_2 - x_1) = F_1 \\ m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) - k_3(x_3 - x_2) = F_2 \\ m_3\ddot{x}_3 + k_3(x_3 - x_2) = F_3 \end{cases} \quad (6.45)$$

Liikeyhtälöt menevät seuraavaan matriisimuotoon

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (6.46)$$

Tulos on sama kuin kohdassa 6.2.1 Newtonin lailla saatu liikeyhtälöryhmä.

## Esimerkki 2



Kuva 6.9. Esimerkki 2.

Tarkastellaan kuvan 6.9 epäkonservatiivista kahden vapausasteen systeemiä, jossa koordinaatit  $x_1$  ja  $x_2$  ovat massojen absoluuttiset asemat ja koordinaatit  $z_1$  ja  $z_2$  suhteelliset asemat tunnetun funktion  $u(t)$  mukaisesti liikkuvaan alustaan nähden. Tätä esimerkkiä käsiteltiin kohdassa 6.2.2 Newtonin lakien avulla. Liike-energia, dissipatiofunktio ja potentiaalfunktio ovat

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{z}_1 + \dot{u})^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{z}_2 + \dot{u})^2 \quad (6.47)$$

$$D = \frac{1}{2} c_1 (\dot{x}_1 - \dot{u})^2 + \frac{1}{2} c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 = \frac{1}{2} c_1 \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} c_2 (\dot{z}_2 - \dot{z}_1)^2 \quad (6.48)$$

$$V = \frac{1}{2} k_1 (x_1 - u)^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2 = \frac{1}{2} k_1 z_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (z_2 - z_1)^2 \quad (6.49)$$

Lagrangen yhtälöissä esiintyvät nollasta poikkeavat derivaatat ovat

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_1} \right) &= \frac{d}{dt} [m_1 (\dot{z}_1 + \dot{u})] = m_1 (\ddot{z}_1 + \ddot{u}) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_2} \right) &= \frac{d}{dt} [m_2 (\dot{z}_2 + \dot{u})] = m_2 (\ddot{z}_2 + \ddot{u}) \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{z}_1} &= c_1 \dot{z}_1 - c_2 (\dot{z}_2 - \dot{z}_1) = (c_1 + c_2) \dot{z}_1 - c_2 \dot{z}_2 & \frac{\partial D}{\partial \dot{z}_2} &= c_2 (\dot{z}_2 - \dot{z}_1) = -c_2 \dot{z}_1 + c_2 \dot{z}_2 \\ \frac{\partial V}{\partial z_1} &= k_1 z_1 - k_2 (z_2 - z_1) = (k_1 + k_2) z_1 - k_2 z_2 & \frac{\partial V}{\partial z_2} &= k_2 (z_2 - z_1) = -k_2 z_1 + k_2 z_2 \end{aligned} \quad (6.50)$$

Sijoittamalla tulokset (6.50) Lagrangen yhtälöihin (6.41) saadaan liikeyhtälöt

$$\begin{cases} m_1 (\ddot{z}_1 + \ddot{u}) + (c_1 + c_2) \dot{z}_1 - c_2 \dot{z}_2 + (k_1 + k_2) z_1 - k_2 z_2 = 0 \\ m_2 (\ddot{z}_2 + \ddot{u}) - c_2 \dot{z}_1 + c_2 \dot{z}_2 - k_2 z_1 + k_2 z_2 = 0 \end{cases} \quad (6.51)$$

joka on sama tulos kuin kohdassa 6.2.2 saatiin. Liikeyhtälöt ovat matriisimuodossa

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -m_1 \ddot{u} \\ -m_2 \ddot{u} \end{Bmatrix} \quad (6.52)$$

Käsitellään vaimennus vielä toisin virtuaalisen työn periaatetta käyttäen. Vaimennusvoimien virtuaalinen työ on

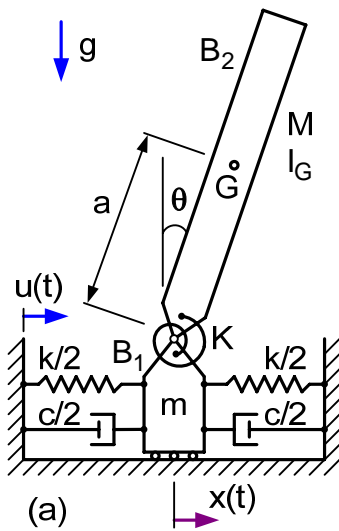
$$\begin{aligned} \delta W &= -c_1 (\dot{x}_1 - \dot{u}) \delta (x_1 - u) - c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \delta (x_2 - x_1) \\ &= -c_1 \dot{z}_1 \delta z_1 - c_2 (\dot{z}_2 - \dot{z}_1) \delta (z_2 - z_1) \quad \Rightarrow \end{aligned} \quad (6.53)$$

$$\begin{aligned}\delta W &= -c_1 \dot{z}_1 \delta z_1 + c_2 (\dot{z}_2 - \dot{z}_1) \delta z_1 - c_2 (\dot{z}_2 - \dot{z}_1) \delta z_2 \\ &= -[(c_1 + c_2) \dot{z}_1 - c_2 \dot{z}_2] \delta z_1 - [-c_2 \dot{z}_1 + c_2 \dot{z}_2] \delta z_2 = Q_1 \delta z_1 + Q_2 \delta z_2\end{aligned}\quad (6.54)$$

josta seuraa kuormituksiksi sama tulos kuin edellä saatiin dissipatiofunktion avulla eli

$$Q_1 = -[(c_1 + c_2) \dot{z}_1 - c_2 \dot{z}_2] \quad Q_2 = -[-c_2 \dot{z}_1 + c_2 \dot{z}_2] \quad (6.55)$$

### Esimerkki 3



Kuva 6.10. Esimerkki 3.

Tarkastellaan kuvan 6.10 mallia, jolla voidaan tutkia esimerkiksi alustan tunnetusta liikkeestä  $u(t)$  johtuvaa rakennuksen värähtelyä. Laskentamallissa rakennusta on kuvattu jäykällä kappaleella  $B_2$  ja sen perustusta partikkelilla  $B_1$ . Koordinaateiksi valitaan perustuksen absoluuttinen asema  $x$  ja rakennuksen kulma-asema  $\theta$ . Rajoitetaan lisäksi pieniin värähtelyihin. Tätä esimerkkiä käsiteltiin kohdassa 6.2.3 Newtonin lakien avulla. Pienien värähtelyiden tapauksessa energioita laskettaessa käytetään approksimaatioita  $\sin \theta \approx \theta$  ja  $\cos \theta \approx 1$ . Painovoiman tekemän työn laskennassa on kuitenkin käytettävä approksimaatiota  $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$ , jotta kaikki ensimmäisen kertaluvun vaikutukset tulevat mukaan. Rakennuksen massakeskiön koordinaatit ovat  $x_G = x + a \sin \theta \approx x + a\theta$   $y_G = a \cos \theta \approx a$   
 $\Rightarrow \dot{x}_G \approx \dot{x} + a\dot{\theta}$   $\dot{y}_G \approx 0$ . Liike-energia, dissipatiofunktio ja potentiaalifunktio ovat

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} I_G \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M (\dot{x} + a\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 & D &= \frac{1}{2} \frac{c}{2} (\dot{x} - \dot{u})^2 + \frac{1}{2} \frac{c}{2} (\dot{u} - \dot{x})^2 \\ V &= \frac{1}{2} K \theta^2 + \frac{1}{2} \frac{k}{2} (x - u)^2 + \frac{1}{2} \frac{k}{2} (u - x)^2 - Mga\theta^2/2\end{aligned}\quad (6.56)$$

Lasketaan Lagrangen yhtälöissä tarvittavat derivaatat

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) &= \frac{d}{dt} [M(\dot{x} + a\dot{\theta}) + m\dot{x}] = (M + m)\ddot{x} + Ma\ddot{\theta} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) &= \frac{d}{dt} [I_G \dot{\theta} + M(\dot{x} + a\dot{\theta})a] = Ma\ddot{x} + (I_G + Ma^2) \ddot{\theta} \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} &= \frac{c}{2} (\dot{x} - \dot{u}) - \frac{c}{2} (\dot{u} - \dot{x}) = c\dot{x} - c\dot{u} & \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{k}{2} (x - u) - \frac{k}{2} (u - x) = kx - ku & \frac{\partial V}{\partial \theta} &= K\theta - Mga\theta = (K + Mga)\theta\end{aligned}\quad (6.57)$$

Sijoittamalla lasketut derivaatat Lagrangen yhtälöihin (6.41) saadaan liikeyhtälöt

$$\begin{aligned} (M+m)\ddot{x} + Ma\ddot{\theta} + c\dot{x} + kx &= ku + c\dot{u} \\ Ma\ddot{x} + (I_G + Ma^2)\ddot{\theta} + (K + Mga)\theta &= 0 \end{aligned} \quad (6.58)$$

joka on sama tulos kuin kohdassa 6.2.32 saatiin. Liikeyhtälöt ovat matriisimuodossa

$$\begin{bmatrix} M+m & Ma \\ Ma & I_G + Ma^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & K - Mga \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c\dot{u} + ku \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.59)$$