7 USEAN VAPAUSASTEEN SYSTEEMIN VAIMENEMATON OMINAISVÄRÄHTELY

7.1 Johdanto

Usean vapausasteen systeemin liikeyhtälöt ovat yleisessä tapauksessa

$$\boxed{[M]\{\ddot{x}\}+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=\{F\}} \tag{7.1}$$

Kun vaimennusta ei ole, menevät liikeyhtälöt (7.1) muotoon

$$\boxed{[M]\{\ddot{x}\}+[K]\{x\}=\{F\}} \tag{7.2}$$

Kun vapausasteiden lukumäärä on n, ovat yhtälöiden (7.1) ja (7.2) matriisien dimensiot $n \times n$ ja vektorien $n \times 1$. Koordinaatit valitaan käytännössä siten, että matriisit ovat symmetrisiä eli

$$\boxed{[M]=[M]^T \qquad [C]=[C]^T \qquad [K]=[K]^T} \tag{7.3}$$

7.2 Vaimenematon ominaisvärähtely

Vaimenemattoman ominaisvärähtelyn liikeyhtälössä on kuormitusvektori $\{F\}=\{0\}$ ja liikeyhtälöt ovat tällöin muotoa

$$\boxed{[M]\{\ddot{x}\}+[K]\{x\}=\{0\}} \tag{7.4}$$

Etsitään yhtälölle (7.4) harmonista ratkaisua muodossa

$$\{x\}=\{X_1 \quad X_2 \quad \cdots \quad X_n\}\cdot\sin(\omega t-\phi)=\{X\}\cdot\sin(\omega t-\phi) \tag{7.5}$$

jossa ω on ominaiskulmataajuus, ϕ vaihekulma ja $\{X\}$ amplitudivektori. Derivoimalla kahdesti ajan suhteen saadaan

$$\{\ddot{x}\}=-\omega^2\cdot\{X_1 \quad X_2 \quad \cdots \quad X_n\}\cdot\sin(\omega t-\phi)=-\omega^2\cdot\{X\}\cdot\sin(\omega t-\phi) \tag{7.6}$$

Sijoittamalla kaavaan (7.4) seuraa tulos

$$\left(-\omega^2[M]+[K]\right)\{X\}\cdot\sin(\omega t-\phi)=\{0\} \tag{7.7}$$

© Matti Lähteenmäki

josta seuraa, että ratkaisu (7.5) on oikea vain, jos on voimassa

$$\boxed{\left([K]-\omega^2 [M] \right)\{X\}=\{0\}} \tag{7.8}$$

joka on tuntemattomien amplitudien $X_1, X_2, \cdots, X_n$ homogeeninen yhtälöryhmä. Matematiikan mukaan ryhmällä (7.8) on ei-triviaaleja ratkaisuja vain, jos sen kerroinmatriisin determinantti on nolla eli

$$\boxed{\det\left([K]-\omega^2 [M] \right)=0} \tag{7.9}$$

jota sanotaan karakteristiseksi yhtälöksi. Kehittämällä determinantti (7.9) saadaan muuttujan $\lambda=\omega^2$ astetta n oleva yhtälö. Tällä yhtälöllä on n juurta, joita merkitään $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ siten, että $0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n$. Luvut $\omega_i=\sqrt{\lambda_i}$ $i=1, 2, \cdots, n$ ovat ominaiskulmataajuudet. Voidaan osoittaa, että ominaiskulmataajuudet ovat ei-negatiivisia reaalilukuja. Luvut $f_i=\omega_i/2\pi$ $i=1, 2, \cdots, n$ ovat ominaistaajuudet. Jokaista ominaiskulmataajuutta ω_i vastaa vakiokerrointa vaille yksikäsitteinen ominaismuoto $\{X\}_i$, joka voidaan ratkaista yhtälöryhmästä (7.8), kun siihen on sijoitettu $\omega=\omega_i$.

Yleisesti on voimassa, että jokaisella mekaanisella systeemillä on yhtä monta ominaiskulmataajuutta, kun sillä on vapausasteita. Jokaiseen ominaiskulmataajuuteen liittyy sille luonteenomainen värähtelyn tyyppi, jota sanotaan ominaismuodoksi. Ominaiskulmataajuudet ja ominaismuodot riippuvat vain systeemin massan ja jäykkyyden jakaantumisesta, eivätkä esimerkiksi kuormituksista tai koordinaattien valinnasta.

Koska ominaismuodot ovat vakiokerrointa vaille yksikäsitteiset, tulee ominaismuoto yksikäsitteisesti määrätyksi, kun sen yhdelle komponentille valitaan arvo. Ominaismuotoa sanotaan normeeratuksi, jos sen komponentit ovat yksikäsitteisiä. Normeeraus voidaan suorittaa monella tavalla, mahdollisia menettelyjä ovat seuraavat.

1. Valitaan kaikissa ominaismuodoissa tietyssä paikassa i olevan komponentin arvoksi yksi. Tämä onnistuu, jos kaikissa ominaismuodossa paikassa i oleva komponentti on nollasta poikkeava.

2. Valitaan kaikissa ominaismuodoissa itseisarvoltaan suurimman komponentin arvoksi yksi.

3. Normeerataan ominaismuodot massamatriisin suhteen eli

$$\{X\}_i^T [M]\{X\}_i = M_i \quad i=1, 2, \cdots, n \tag{7.10}$$

Kaavan (7.10) luvut $M_i \neq 0$ voidaan valita vapaasti, mutta yleensä käytetään arvoja $M_i=1$ $i=1, 2, \cdots, n$. Normeerauksessa käytettyä suuretta

 © Matti Lähteenmäki

$$\boxed{M_i = \{X\}_i^T [M] \{X\}_i} \tag{7.11}$$

sanotaan ominaismuotoon $\{X\}_i$ liittyväksi modaalimassaksi. Vastaavasti suuretta

$$\boxed{K_i = \{X\}_i^T [K] \{X\}_i} \tag{7.12}$$

sanotaan modaalijäykkyydeksi. Kertomalla ominaisparia ω_i ja $\{X\}_i$ vastaava yhtälö (7.8) vasemmalta vektorilla $\{X\}_i^T$ saadaan tulos

$$\{X\}_i^T [K] \{X\}_i - \omega_i^2 \{X\}_i^T [M] \{X\}_i = 0 \tag{7.13}$$

josta seuraa kaavojen (7.11) ja (7.12) perusteella tulos

$$\boxed{\omega_i^2 = K_i / M_i} \tag{7.14}$$

Ominaiskulmataajuudet voidaan vapausasteiden määrästä riippumatta periaatteessa laskea karakteristista yhtälöstä (7.9) ja ominaismuodot yhtälöryhmästä (7.8). Determinantin (7.9) kehittäminen ja siitä seuraavan yhtälön juurien ratkaiseminen on kuitenkin työläs jopa tietokoneella suoritettuna, jos vapausasteita on hyvin paljon. Tietokonelaskentaan onkin kehitetty tehokkaita iteratiivisia ominaiskulmataajuuksien ja -muotojen määritysmenetelmiä, joihin ei tässä kuitenkaan puututa.

Käsilaskuja tarvitaan ainakin teoriaa selventävien sovellusten käsittelyssä. Jos vapausasteita on neljä tai vähemmän, voidaan ominaiskulmataajuudet laskea kohtuullisella työllä karakteristista yhtälöstä (7.9) ja ominaismuodot yhtälöryhmästä (7.8). Normeerattujen ominaismuotojen määritystä voidaan hieman systematisoida seuraavassa esitettävällä tavalla.

Merkitään ryhmän (7.8) kerroinmatriisia

$$\boxed{[D(\omega)] = [K] - \omega^2 [M]} \tag{7.15}$$

Oletetaan, että ω_i on karakteristisen yhtälön (7.9) yksinkertainen juuri eli yksinkertainen ominaiskulmataajuus. Koska ominaismuodon kaikki komponentit eivät ole nollia, voidaan olettaa, että vektorin $\{X\}_i$ ensimmäinen komponentti ei ole nolla. Silloin voidaan valita sen ensimmäinen komponentti ykköseksi eli

$$\{X\}_i = \{1 \quad X_2 \quad X_2 \quad \cdots \quad X_n\}_i = \{1 \quad \{V\}_i\} \tag{7.16}$$

jossa vektori $\{V\}_i = \{X_2 \quad X_3 \quad \cdots \quad X_n\}_i$ sisältää ominaismuodon $\{X\}_i$ komponentit ensimmäistä lukuun ottamatta. Yhtälöryhmä (7.8) on tapauksessa $\omega = \omega_i$

$$\left[D(\omega_i)\right]\{X\}_i = \{0\} \tag{7.17}$$

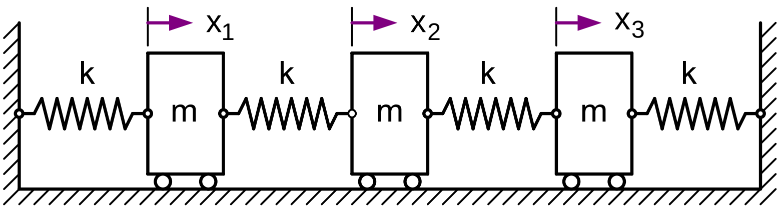
Ositetaan yhtälöryhmä (7.17) seuraavasti

$$\left[\begin{array}{c|c} D_{11}(\omega_i) & \left[D_{12}(\omega_i)\right] \\ \hline \{D_{21}(\omega_i)\} & \left[D_{22}(\omega_i)\right] \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} 1 \\ \hline \{V\}_i \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ \hline \{0\} \end{array}\right\} \tag{7.18}$$

Koska ω_i on yksinkertainen ominaiskulmataajuus, matriisi $\left[D_{22}(\omega_i)\right]$ ei ole singulaarinen ja sillä on käänteismatriisi. Yhtälöstä (7.18) seuraa vektorille $\{V\}_i$ laskukaava

$$\boxed{\{V\}_i = -\left[D_{22}(\omega_i)\right]^{-1}\{D_{21}(\omega_i)\}} \tag{7.19}$$

7.2.1 Esimerkki 1



Kuva 7.1 Esimerkki 1.

Tarkastellaan kuvan 7.1 kolmen vapausasteen systeemin ominaiskulmataajuuksien ja ominaismuotojen määritystä edellä esitetyn teorian mukaisesti.

Ominaisvärähtelyn liikeyhtälöryhmäksi tulee

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 2k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

joten kaavan (7.15) kerroinmatriisi on

$$\left[D(\omega)\right] = \begin{bmatrix} 2k - m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - m\omega^2 & -k \\ 0 & -k & 2k - m\omega^2 \end{bmatrix}$$

Liikeyhtälöryhmää vastaava karakteristinen yhtälö on

$$\begin{vmatrix} 2k-m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k-m\omega^2 & -k \\ 0 & -k & 2k-m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

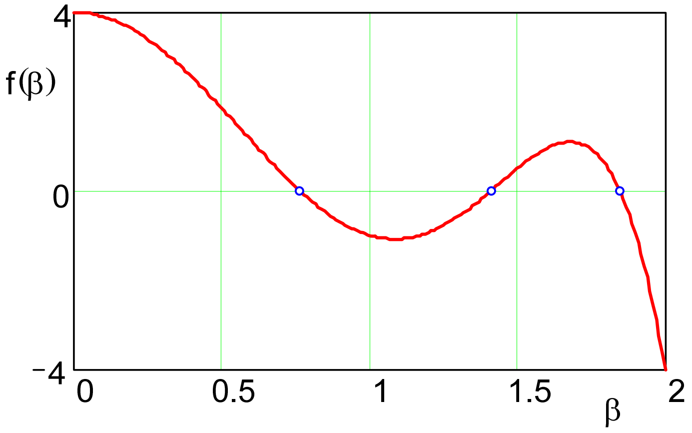
Kehittämällä determinantti (7.22) ensimmäisen vaakarivin mukaan ja ratkaisemalla karakteristisen yhtälön juuret saadaan

$$(2k-m\omega^2)\,[(2k-m\omega^2)^2-k^2]+k(-k)(2k-m\omega^2)=0 \quad \Rightarrow$$
$$(2k-m\omega^2)\,(2k^2-4mk\,\omega^2+m^2\omega^4)=0 \quad \Rightarrow$$
$$2k-m\omega^2=0 \quad \text{tai} \quad m^2\omega^4-4mk\,\omega^2+2k^2=0 \quad \Rightarrow$$
$$\omega^2=\frac{2k}{m} \quad \text{tai} \quad \omega^2=\frac{4mk\pm\sqrt{16m^2k^2-4m^2\cdot 2k^2}}{2m^2}=\frac{(2\pm\sqrt{2})k}{m}$$

Ominaiskulmataajuuksille tulee näin ollen suuruusjärjestyksessä

$$\omega_1^2=(2-\sqrt{2}\,)\frac{k}{m} \qquad \omega_2^2=2\frac{k}{m} \qquad \omega_3^2=(2+\sqrt{2})\frac{k}{m} \qquad \Rightarrow$$

$$\omega_1\approx 0{,}765\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \omega_2\approx 1{,}414\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \omega_3\approx 1{,}848\sqrt{\frac{k}{m}}$$



Kuva 7.2 Ominaiskulmataajuudet.

Merkitsemällä $\beta=\omega\sqrt{m/k}$ karateristinen yhtälö voidaan esittää muodossa

$$f(\beta)=(2-\beta^2)(2-4\beta^2+\beta^4)=0$$

Kuvassa 7.2 on funktion $f(\beta)=0$ kuvaaja. Ominaiskulmataajuudet vastaavat sen nollakohtia.

Määritetään seuraavaksi ominaismuodot. Ositellaan kerroinmatriisi (7.15) kaavan (7.18) mukaisesti

$$[D(\omega)]=\left[\begin{array}{c|c} D_{11}(\omega) & [D_{12}(\omega)] \\ \hline \{D_{21}(\omega)\} & [D_{22}(\omega)] \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|cc} 2k-m\omega^2 & -k & 0 \\ \hline -k & 2k-m\omega^2 & -k \\ 0 & -k & 2k-m\omega^2 \end{array}\right]$$

Kun $\underline{\omega = \omega_1}$, osamatriiseiksi tulevat

$$\{D_{21}(\omega_1)\} = \begin{Bmatrix} -k \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad [D_{22}(\omega_1)] = k\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad [D_{22}(\omega_1)]^{-1} = \frac{1}{k}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \{V\}_1 = \{X_2 \;\; X_3\}_1 = -\frac{1}{k}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -k \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Ensimmäiseksi ominaismuodoksi tulee näin ollen $\{X\}_1 = \{1 \;\; \sqrt{2} \;\; 1\}$.

Kun $\underline{\omega = \omega_2}$, saadaan vastaavasti

$$\{D_{21}(\omega_2)\} = \begin{Bmatrix} -k \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad [D_{22}(\omega_2)] = k\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad [D_{22}(\omega_1)]^{-1} = \frac{1}{k}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \{V\}_2 = \{X_2 \;\; X_3\}_2 = -\frac{1}{k}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -k \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

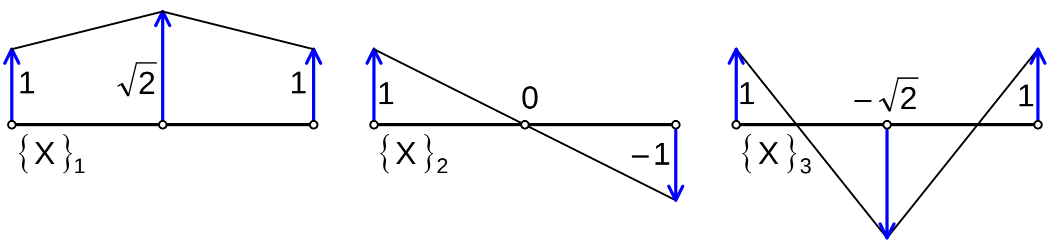
josta seuraa toiseksi ominaismuodoksi $\{X\}_2 = \{1 \;\; 0 \;\; -1\}$.

Kun $\underline{\omega = \omega_3}$, on $\{D_{21}(\omega_3)\} = \begin{Bmatrix} -k \\ 0 \end{Bmatrix}$ ja

$$[D_{22}(\omega_3)] = k\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -1 \\ -1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad [D_{22}(\omega_3)]^{-1} = \frac{1}{k}\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \{V\}_3 = \{X_2 \;\; X_3\}_3 = -\frac{1}{k}\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -k \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

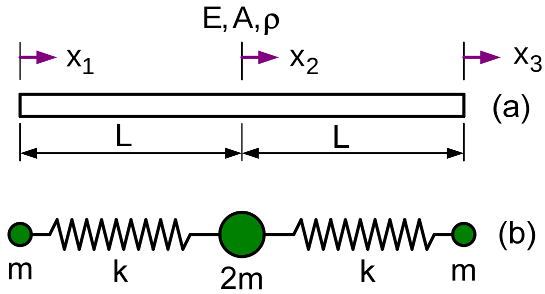
joten kolmas ominaismuoto on $\{X\}_3 = \{1 \; -\sqrt{2} \;\; 1\}$. Kuvassa 7.3 on havainnollistettu laskettuja normeerattuja ominaismuotoja.



Kuva 7.3 Ominaismuodot.

7.2.2 Esimerkki 2

Edellä esitetty ominaismuotojen ratkaisumenetelmä sopii myös tapauksiin, joissa systeemillä on jäykän kappaleen liikemahdollisuuksia. Tällöin systeemillä on yhtä monta nollan suuruista ominaiskulmataajuutta kuin sillä on toisistaan riippumattomia jäykän kappaleen liikemahdollisuuksia.



Kuva 7.4 Esimerkki 2.

Tutkitaan kuvan 7.4 (a) sauvan aksiaalisia ominaisvärähtelyitä kuvan 7.4 (b) kolmen vapausasteen mallilla, jossa jousivakio $k = EA/L$ ja massa $m = \rho AL/2$. Systeemin liikeyhtälöt ovat

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Systeemin jäykkyysmatriisi on singulaarinen eli $\det[K] = 0$. Kaavan (7.15) kerroinmatriisi on

$$[D(\omega)] = \begin{bmatrix} k - m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - 2m\omega^2 & -k \\ 0 & -k & k - m\omega^2 \end{bmatrix}$$

Liikeyhtälöryhmää vastaava karakteristinen yhtälö on

$$\begin{vmatrix} k - m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - 2m\omega^2 & -k \\ 0 & -k & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$(k - m\omega^2)\,[2(k - m\omega^2)^2 - k^2] + k(-k)(k - m\omega^2) = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$m\omega^2 (k - m\omega^2)\,(-4k + m\omega^2) = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\omega_1^2 = 0 \qquad \omega_2^2 = k/m = 2E/(\rho L^2) \qquad \omega_3^2 = 4k/m = 8E/(\rho L^2)$$

Ominaiskulmataajuus $\omega_1 = 0$ vastaa jäykän kappaleen liikettä. Lasketaan vastaava ominaismuoto $\{X\}_1$. Ositellaan kerroinmatriisi (7.15) kaavan (7.18) mukaisesti, jolloin seuraa tulos

 © Matti Lähteenmäki

$$[D(\omega)] = \left[\begin{array}{c|c} D_{11}(\omega) & [D_{12}(\omega)] \\ \hline \{D_{21}(\omega)\} & [D_{22}(\omega)] \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} k - m\omega^2 & -k & 0 \\ \hline -k & 2k - 2m\omega^2 & -k \\ 0 & -k & k - m\omega^2 \end{array}\right]$$

Kun $\underline{\omega = \omega_1 = 0}$, osamatriiseiksi tulevat

$$\{D_{21}(\omega_1)\} = \begin{Bmatrix} -k \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad [D_{22}(\omega_1)] = k\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad [D_{22}(\omega_1)]^{-1} = \frac{1}{k}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \{V\}_1 = \{X_2 \ \ X_3\}_1 = -\frac{1}{k}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -k \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Ominaismuodoksi tulee näin ollen $\{X\}_1 = \{1 \ \ 1 \ \ 1\}$, joka on jäykän kappaleen translaatioliike, koska kaikilla komponenteilla on sama arvo, jolloin jouset eivät veny ominaismuodon $\{X\}_1$ mukaisessa liikkeessä.

7.3 Moninkertaiset ominaistaajuudet

Edellä normeeratun ominaismuodon $\{X\}_i$ laskentamenetelmässä oletettiin, että ω_i on yksinkertainen ominaiskulmataajuus. Tarkastellaan tapausta, jossa ω_i on p-kertainen ominaiskulmataajuus eli se on karakteristisen yhtälön (7.9) p-kertainen juuri, $p > 1$. Tällaista ominaiskulmataajuutta vastaa ääretön määrä ominaismuotoja, joista enintään p kpl on lineaarisesti riippumattomia. Nämä p lineaarisesti riippumatonta ominaismuotoa voidaan valita seuraavasti. Ositetaan $\{X\}_i$ siten, että

$$\{X\}_i = \{\{W\}_i \mid \{V\}_i\} \tag{7.20}$$

jossa ominaismuodon osat ovat

$$\{W\}_i = \{X_1 \quad X_2 \quad \ldots \quad X_p\} \qquad \{V\}_i = \{X_{p+1} \quad X_{p+2} \quad \ldots \quad X_n\} \tag{7.21}$$

Yhtälöstä (7.8) tapauksessa $\omega = \omega_i$ saatava yhtälöryhmä voidaan osittaa vastaavasti

$$\left[\begin{array}{c|c} [D_{11}(\omega_i)] & [D_{12}(\omega_i)] \\ \hline [D_{21}(\omega_i)] & [D_{22}(\omega_i)] \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \{W\}_i \\ \hline \{V\}_i \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \{0\} \\ \hline \{0\} \end{array}\right\} \tag{7.22}$$

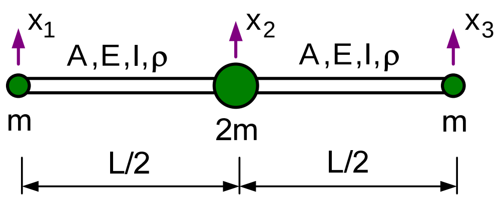
jolloin $[D_{11}(\omega_i)]$ on $p \times p -$matriisi. Koska ω_i on p-kertainen ominaiskulmataajuus, osamatriisi $[D_{22}(\omega_i)]$ ei ole singulaarinen. Yhtälöstä (7.22) ratkeaa ominaismuodon loppupään alkioille kaava

$$\boxed{\{V\}_i = -[D_{22}(\omega_i)]^{-1}[D_{21}(\omega_i)]\{W\}_i} \tag{7.23}$$

Yhtälöstä (7.21) voidaan laskea p lineaarisesti riippumatonta ominaismuotoa $\{X\}_j$, $j = i, i+1, \cdots, i+p-1$ sijoittamalla siihen peräkkäin vektorit

$$\boxed{\{W\}_i = \{1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0\},\ \{W\}_{i+1} = \{0 \quad 1 \quad \cdots \quad 0\}, \ldots,\ \{W\}_{i+p-1} = \{0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1\}} \tag{7.24}$$

7.3.1 Esimerkki 3



Kuva 7.5 Esimerkki 3.

Tutkitaan esimerkkinä edellä esitetystä ominaismuotojen määritysmenetelmästä sivusuunnassa tukemattoman palkin poikittaista ominaisvärähtelyä kuvan 7.5 kolmen vapausasteen laskentamallilla, jolloin $m = \rho AL/4$. Systeemille voidaan johtaa esimerkiksi elementtimenetelmällä seuraavat liikeyhtälöt

$$\frac{\rho AL}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \frac{12EI}{L^3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Kaavan (7.15) kerroinmatriisi on

$$[D(\omega)] = \frac{12EI}{L^3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} - \omega^2 \frac{\rho AL}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{12EI}{L^3}\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} - \omega^2 \frac{\rho AL^4}{48EI}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

Kun otetaan käyttöön merkintä $\mu^2 = \omega^2 \dfrac{\rho AL^4}{48EI}$, menee matriisi $[D(\omega)]$ muotoon

$$[D(\mu)] = \frac{12EI}{L^3}\begin{bmatrix} 1-\mu^2 & -2 & 1 \\ -2 & 4-2\mu^2 & -2 \\ 1 & -2 & 1-\mu^2 \end{bmatrix}$$

Karakteristinen yhtälö on tällöin

$$\det\left[D(\mu)\right]=0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{vmatrix} 1-\mu^2 & -2 & 1 \\ -2 & 4-2\mu^2 & -2 \\ 1 & -2 & 1-\mu^2 \end{vmatrix}=0 \qquad \Rightarrow$$

$$(1-\mu^2)[(4-2\mu^2)(1-\mu^2)-4]+2\cdot[(-2)(1-\mu^2)+2]+1\cdot[4-(4-2\mu^2)\cdot 1]=0 \;\Rightarrow$$

$$\mu^4(4-\mu^2)=0 \qquad \Rightarrow \qquad \mu_1^2=\mu_2^2=0 \qquad \mu_3^2=4$$

$$\Rightarrow \qquad \omega_1=\omega_2=0 \qquad \omega_3=\frac{2}{L^2}\sqrt{\frac{3EI}{\rho A}}$$

Ominaismuodot ovat vakiokerrointa vaille yksikäsitteiset, joten niiden laskennassa voidaan käyttää matriisin $\left[D(\omega)\right]$ paikalla matriisia $\left[D(\mu)\right]$ ilman vakiokerrointa eli

$$\left[\overline{D}(\mu)\right]=\begin{bmatrix} 1-\mu^2 & -2 & 1 \\ -2 & 4-2\mu^2 & -2 \\ 1 & -2 & 1-\mu^2 \end{bmatrix}$$

Määritetään ensin yksinkertaista ominaiskulmataajuutta ω_3 vastaava ominaismuoto, jolloin $\mu_3^2=4$ ja kaavan (7.18) mukainen kerroinmatriisin ositus on

$$\left[\overline{D}(\mu_3)\right]=\left[\begin{array}{c:cc} -3 & -2 & 1 \\ \hdashline -2 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{array}\right]$$

ja osamatriiseiksi tulevat näin ollen

$$\left\{\overline{D}_{21}(\mu_3)\right\}=\begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \left[\overline{D}_{22}(\mu_3)\right]=\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left[\overline{D}_{22}(\mu_3)\right]^{-1}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \{V\}_3=\{X_2 \;\; X_3\}_3=-\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Kolmanneksi ominaismuodoksi tulee siis $\{X\}_3=\{1 \;\; -1 \;\; 1\}$.

Kaksinkertaista ominaiskulmataajuutta $\omega_1=\omega_2=0$ vastaa $\mu_1^2=\mu_2^2=0$ ja kaavan (7.22) mukainen kerroinmatriisin ositus on

$$\left[\overline{D}(\mu_1)\right]=\left[\overline{D}(\mu_2)\right]=\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ \hline 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Kaavan (7.23) mukaiset osamatriisit ovat

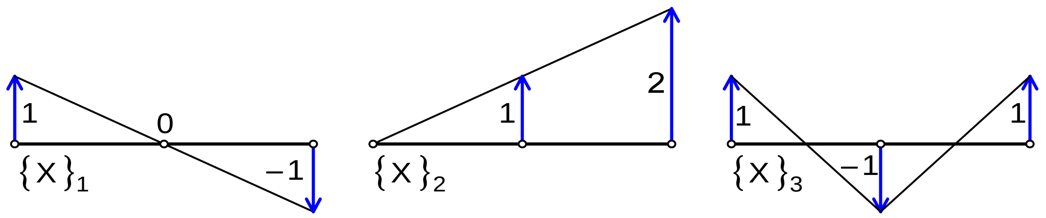
$$\left[\overline{D}_{22}(\mu_1)\right]=\left[\overline{D}_{22}(\mu_2)\right]=1 \qquad \left[\overline{D}_{21}(\mu_1)\right]=\left[\overline{D}_{21}(\mu_2)\right]=\left[1 \quad -2\right]$$

Lineaarisesti riippumattomat ominaisvektorit $\{X\}_1$ ja $\{X\}_2$ saadaan kaavasta (7.23) sijoittamalla siihen $\{W\}_1=\{1 \quad 0\}$ ja $\{W\}_2=\{0 \quad 1\}$ kaavan (7.24) mukaisesti eli

$$\{V\}_1=-1\cdot\left[1 \quad -2\right]\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}=\{-1\} \qquad \Rightarrow \qquad \{X\}_1=\{1 \quad 0 \quad -1\}$$

$$\{V\}_2=-1\cdot\left[1 \quad -2\right]\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}=\{2\} \qquad \Rightarrow \qquad \{X\}_2=\{0 \quad 1 \quad 2\}$$

Kuvassa 7.6 on havainnollistettu edellä laskettuja ominaismuotoja ja siitä näkyy selvästi, että $\{X\}_1$ ja $\{X\}_2$ ovat jäykän kappaleen rotaatioliikkeitä.



Kuva 7.6 Ominaismuodot.

7.4 Ominaismuotojen ortogonaalisuus

Tarkastellaan sitten erästä ominaismuotojen tärkeätä ominaisuutta. Olkoot ω_i ja ω_j kaksi erisuurta ominaiskulmataajuutta sekä $\{X\}_i$ ja $\{X\}_j$ niitä vastaavat ominaismuodot. Silloin kaavan (7.8) perusteella on voimassa

$$[K]\{X\}_i=\omega_i^2[M]\{X\}_i \qquad [K]\{X\}_j=\omega_j^2[M]\{X\}_j \tag{7.25}$$

Kertomalla kaavan (7.25) ensimmäinen yhtälö vasemmalta vektorilla $\{X\}_j^T$, saadaan

$$\{X\}_j^T [K] \{X\}_i = \omega_i^2 \{X\}_j^T [M] \{X\}_i \tag{7.26}$$

Vastaavasti saadaan kertomalla kaavan (7.25) jälkimmäinen yhtälö vasemmalta vektorilla $\{X\}_i^T$ ja ottamalla huomioon matriisien $[K]$ ja $[M]$ symmetrisyys

$$\{X\}_i^T [K] \{X\}_j = \omega_j^2 \{X\}_i^T [M] \{X\}_j \quad \Rightarrow \quad \left(\{X\}_i^T [K] \{X\}_j\right)^T = \left(\omega_j^2 \{X\}_i^T [M] \{X\}_j\right)^T$$

$$\Rightarrow \qquad \{X\}_j^T [K] \{X\}_i = \omega_j^2 \{X\}_j^T [M] \{X\}_i \tag{7.27}$$

Vähentämällä yhtälöstä (7.26) puolittain yhtälö (7.27) seuraa

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2)\, \{X\}_j^T [M] \{X\}_i = 0 \tag{7.28}$$

Koska oletettiin, että $\omega_i \neq \omega_j$, saadaan tulos

$$\boxed{\{X\}_j^T [M] \{X\}_i = 0} \tag{7.29}$$

jonka mukaan ominaismuodot ovat ortogonaaliset massamatriisin suhteen. Sijoittamalla tulos (7.29) kaavaan (7.26) saadaan

$$\boxed{\{X\}_j^T [K] \{X\}_i = 0} \tag{7.30}$$

joten ominaismuodot ovat ortogonaaliset myös jäykkyysmatriisin suhteen. Jos $\omega_i = \omega_j$, eivät tulokset (7.29) ja (7.30) ole välttämättä voimassa.

7.4.1 Esimerkki 4

Tarkastellaan kuvan 7.5 systeemin ominaisvektoreita merkiten $k = 12EI/L^3$. Erisuuria ominaiskulmataajuuksia vastaaville ominaismuodoille $\{X\}_1$ ja $\{X\}_3$ pätee

$$\{X\}_1^T [M] \{X\}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0$$

$$\{X\}_1^T [K] \{X\}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & -2k & k \\ -2k & 4k & -2k \\ k & -2k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0$$

joten ominaismuodot $\{X\}_1$ ja $\{X\}_3$ ovat ortogonaaliset. Samoin nähdään ominaismuotojen $\{X\}_2$ ja $\{X\}_3$ ortogonaalisuus. Tutkitaan kaksinkertaista ominaiskulmataajuutta $\omega_1 = \omega_2 = 0$ vastaavien ominaismuotojen $\{X\}_1$ ja $\{X\}_2$ ortogonaalisuus.

$$\{X\}_1^T [M] \{X\}_2 = [1 \quad 0 \quad -1] \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix} = 2m \neq 0$$

$$\{X\}_1^T [K] \{X\}_2 = [1 \quad 0 \quad -1] \begin{bmatrix} k & -2k & k \\ -2k & 4k & -2k \\ k & -2k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0$$

joten useampikertaista ominaiskulmataajuutta vastaavat ominaismuodot eivät välttämättä ole ortogonaaliset, vaikka olisivat lineaarisesti riippumattomat. Voidaan osoittaa, että on aina mahdollista valita p-kertaista ominaiskulmataajuutta vastaavasta ominaismuotojoukosta p kpl keskenään ortogonaalista ominaismuotoa. Tarkasteltavassa tapauksessa $\omega_1 = \omega_2 = 0$ esimerkiksi ominaismuodot

$$\{X\}_1 = \{1 \quad 0 \quad -1\} \qquad \text{ja} \qquad \{\overline{X}\}_2 = \{X\}_1 + \{X\}_2 = \{1 \quad 1 \quad 1\}$$

ovat ortogonaaliset massa- ja jäykkyysmatriisin suhteen, sillä

$$\{X\}_1^T [M] \{\overline{X}\}_2 = [1 \quad 0 \quad -1] \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0$$

$$\{X\}_1^T [K] \{\overline{X}\}_2 = [1 \quad 0 \quad -1] \begin{bmatrix} k & -2k & k \\ -2k & 4k & -2k \\ k & -2k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0$$

Ominaismuoto $\{X\}_3$ on ortogonaalinen kaikkien ominaiskulmataajuutta $\omega_1 = \omega_2 = 0$ vastaavien ominaismuotojen kanssa.

7.5 Normaalimuotomenetelmän perusajatukset

Ominaispareja ja ominaismuotojen ortogonaalisuutta voidaan hyödyntää värähtelyanalyysissä monella tavalla. Eräs tärkeimmistä tavoista on liikeyhtälöiden ratkaiseminen normaalimuotomenetelmällä, jonka perusajatukset esitetään seuraavassa.

Koska p-kertaiselle ominaiskulmataajuudelle kaavoista (7.23) ja (7.24) lasketuista ominaismuodoista voidaan aina muodostaa p kpl ortogonaalisia ominaismuotoja esimerkiksi Gram-Schmidt prosessilla, voidaan olettaa, että systeemille on määritetty n ortogonaalista ominaismuotoa $\{X\}_i$, $i=1,2,\cdots,n$. Määritellään systeemin modaalimatriisi $[\Phi]$ siten, että sen pystyrivit ovat normeeratut ominaismuodot

$$[\Phi]=\left[\,\{X\}_1 \quad \{X\}_2 \quad \ldots \quad \{X\}_n\,\right] \tag{7.31}$$

Kaavojen (7.11) ja (7.29) perusteella voidaan kirjoittaa tulos

$$\boxed{[\tilde{M}]=[\Phi]^T[M][\Phi]=\begin{bmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M_n \end{bmatrix}} \tag{7.32}$$

jossa $[\tilde{M}]$ on modaalimassamatriisi eli yleistetty massamatriisi. Vastaavasti kaavoista (7.12) ja (7.30) seuraa

$$\boxed{[\tilde{K}]=[\Phi]^T[K][\Phi]=\begin{bmatrix} K_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_n \end{bmatrix}} \tag{7.33}$$

jossa $[\tilde{K}]$ on modaalijäykkyysmatriisi eli yleistetty jäykkyysmatriisi. Erityisesti on syytä huomata, että modaalimassamatriisi ja modaalijäykkyysmatriisi ovat ominaismuotojen ortogonaalisuuden takia lävistäjämatriiseja. Jos ominaismuodot normeerataan kaavan (7.11) osoittamalla tavalla niin, että modaalimassat ovat ykkösiä eli $M_i=1,\ i=1,2,\cdots,n$, sanotaan niitä systeemin ortonormaaleiksi ominaismuodoiksi. Tällöin modaalimassamatriisi on $n\times n-$yksikkömatriisi ja modaalijäykkyysmatriisissa lävistäjäalkiot ovat kaavan (7.14) mukaisesti ominaiskulmataajuuksien neliöt eli

$$[\tilde{M}]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad [\tilde{K}]=\begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_n^2 \end{bmatrix} \tag{7.34}$$

Edellä todettiin, että systeemille voidaan määrittää sen vapausasteiden määrän mukainen joukko keskenään ortogonaalisia ominaisvektoreita, jotka ovat silloin myös lineaarisesti riippumattomia. Tästä seuraa, että kaikki mahdolliset systeemin asemat $\{x\}$ voidaan esittää ominaisvektoreiden lineaarikombinaationa eli muodossa

$$\boxed{\{x\} = \sum_{j=1}^{n} c_j \{X\}_j} \tag{7.35}$$

jossa luvut c_i , $i = 1, 2, \cdots, n$ ovat vakioita. Vakioiden c_i määräämiseksi kerrotaan kaava (7.35) puolittain vektorilla $\{X\}_i^T [M]$, jolloin kaavoista (7.11) ja (7.29) seuraa

$$\{X\}_i^T [M] \{x\} = \sum_{j=1}^{n} c_j \{X\}_i^T [M] \{X\}_j = c_i M_i \qquad \Rightarrow$$

$$\boxed{c_i = \frac{1}{M_i} \{X\}_i^T [M] \{x\}} \tag{7.36}$$

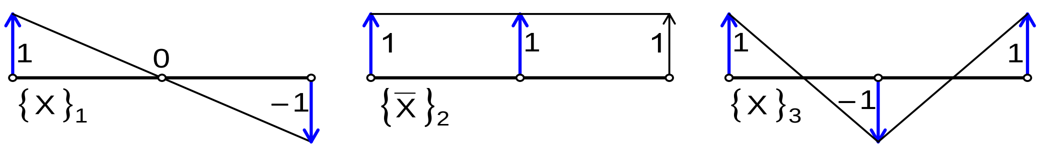
Kaavat (7.35) ja (7.36) sisältävät normaalimuotomenetelmän perusajatuksen, jonka mukaan systeemin kaikki asemat voidaan esittää sen ominaismuotojen lineaarikombinaatioina.

7.5.1 Esimerkki 5

Tarkastellaan normaalimuotomenetelmän perusajatusta kuvan 7.5 esimerkin avulla. Systeemin ortogonaalisiksi ominaismuodoiksi saatiin edellä

$$\{X\}_1 = \{1 \quad 0 \quad -1\} \qquad \{\overline{X}\}_2 = \{1 \quad 1 \quad 1\} \qquad \{X\}_3 = \{1 \quad -1 \quad 1\}$$

jotka on esitetty kuvassa 7.7. Ensimmäinen ominaismuoto on antisymmetrinen ja siinä on toisessa vapausasteessa solmupiste. Kaksi muuta ominaismuotoa ovat symmetrisiä.



Kuva 7.7 Ominaismuodot.

Kaavan (7.35) mukaan jokainen siirtymätila $\{x\}$ voidaan esittää muodossa

$$\{x\} = c_1 \{X\}_1 + c_2 \{\overline{X}\}_2 + c_3 \{X\}_3$$

Olkoon siirtymätila $\{x\} = a \cdot \{1 \quad 2 \quad -1\}$, jossa a on vakio. Määritetään sitä vastaavat kertoimet (7.36). Lasketaan ensin kaavassa (7.36) tarvittavat modaalimassat.

$$M_1 = \{X\}_1^T[M]\{X\}_1 = [1 \quad 0 \quad -1]\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} = 2m$$

$$M_2 = \{X\}_2^T[M]\{X\}_2 = [1 \quad 1 \quad 1]\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = 4m$$

$$M_3 = \{X\}_3^T[M]\{X\}_3 = [1 \quad -1 \quad 1]\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} = 4m$$

Kertoimiksi (7.36) tulee

$$c_1 = \frac{1}{M_1}\{X\}_1^T[M]\{x\} = \frac{1}{2m}[1 \quad 0 \quad -1]\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} a \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{Bmatrix} = a$$

$$c_2 = \frac{1}{M_2}\{X\}_2^T[M]\{x\} = \frac{1}{4m}[1 \quad 1 \quad 1]\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} a \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{Bmatrix} = a$$

$$c_3 = \frac{1}{M_3}\{X\}_3^T[M]\{x\} = \frac{1}{4m}[1 \quad -1 \quad 1]\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} a \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{Bmatrix} = -a$$

Todetaan vielä tarkistukseksi, että

$$\begin{aligned} c_1\{X\}_1 + c_2\{\overline{X}\}_2 + c_3\{X\}_3 &= a \cdot \{1 \quad 0 \quad -1\} + a \cdot \{1 \quad 1 \quad 1\} - a \cdot \{1 \quad -1 \quad 1\} \\ &= a \cdot \{1 \quad 2 \quad -1\} = \{x\} \end{aligned}$$

7.6 Ominaisvärähtelytehtävän yleinen ratkaisu

Ominaisvärähtelyn liikeyhtälön (7.4) ratkaisuyrite (7.5) toimii, kun vakioksi ω valitaan jokin systeemin ominaiskulmataajuuksista ω_i ja amplitudivektoriksi $\{X\}$ vastaava ominaismuoto $\{X\}_i$ eli ratkaisuyrite toimii ominaispareilla $(\omega_i, \{X\}_i)$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

Liikeyhtälön yleinen ratkaisu on tällöin ominaispareja vastaavien ratkaisujen lineaarinen yhdistelmä eli

$$\boxed{\{x\} = \sum_{i=1}^{n} A_i \{X\}_i \sin(\omega_i t - \phi_i)} \tag{7.37}$$

jossa $\{X\}_i$ on normeerattu ominaismuoto sekä A_i ja ϕ_i ovat vakioita. Vaihtoehtoinen muoto ratkaisulle (7.37) on

$$\boxed{\{x\} = \sum_{i=1}^{n} \{X\}_i \left(B_i \sin\omega_i t + C_i \cos\omega_i t\right)} \tag{7.38}$$

jossa B_i ja C_i ovat vakioita. Nopeusvektoriksi tulee kaavasta (7.38) derivoimalla

$$\{\dot{x}\} = \sum_{i=1}^{n} \{X\}_i \, \omega_i \left(B_i \cos\omega_i t - C_i \sin\omega_i t\right) \tag{7.39}$$

Vakioita B_i ja C_i tai A_i ja ϕ_i on 2n kappaletta ja ne saadaan laskettua systeemin alkuehdoista hetkellä $t = 0$.

$$\boxed{\{x(0)\} = \{x_0\} \qquad \{\dot{x}(0)\} = \{\dot{x}_0\}} \tag{7.40}$$

Alkuehdoista (7.40) sekä yhtälöistä (7.38) ja (7.39) seuraa

$$\{x(0)\} = \sum_{i=1}^{n} \{X\}_i \, C_i = \{x_0\} \qquad \{\dot{x}(0)\} = \sum_{i=1}^{n} \{X\}_i \, \omega_i \, B_i = \{\dot{x}_0\} \tag{7.41}$$

Kun yhtälöt (7.41) kerrotaan vasemmalta vektorilla $\{X\}_j^T [M]$ ja otetaan huomioon ominaismuotojen ortogonaalisuus ja modaalimassan määritelmä, saadaan

$$\boxed{C_i = \frac{1}{M_i} \{X\}_i^T [M] \{x_0\} \qquad B_i = \frac{1}{\omega_i M_i} \{X\}_i^T [M] \{\dot{x}_0\}} \tag{7.42}$$

7.6.1 Esimerkki 6

Ratkaistaan kuvan 7.1 systeemin ratkaisussa (7.38) olevat vakiot B_i ja C_i edellä esitetyllä tavalla, kun alkuehdot ovat $\{x_0\} = \{a \quad 0 \quad 0\}$ ja $\{\dot{x}_0\} = \{0 \quad 0 \quad 0\}$. Alkuehdot vastaavat tilannetta, jossa vasemman puoleinen massa on siirretty asemaan $x_1 = a$ muiden massojen ollessa tasapainoasemissaan. Massat lähtevät liikkeelle ilman alkunopeuksia. Lasketaan aluksi modaalimassat

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{Bmatrix} = 4m$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} = 2m$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{Bmatrix} = 4m$$

Vakioiksi C_1, C_2 ja C_3 tulee tässä tapauksessa

$$C_1 = \frac{1}{4m} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4m} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} ma \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{a}{4}$$

$$C_2 = \frac{1}{2m} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2m} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} ma \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{a}{2}$$

$$C_3 = \frac{1}{4m} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4m} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} ma \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{a}{4}$$

Koska alkunopeudet ovat nollia, on selvästi voimassa $B_1 = B_2 = B_3 = 0$.

 © Matti Lähteenmäki