USEAN VAPAUSASTEEN SYSTEEMIN VAIMENEMATON OMINAISVÄRÄHTELY

Vaimenemattoman ominaisvärähtelyn **liikeyhtälöt**

$$\boxed{[M]\{\ddot{x}\}+[K]\{x\}=\{0\}}$$

Ratkaisu on muotoa

$$\boxed{\{x\}=\{X_1 \quad X_2 \quad \cdots \quad X_n\}\cdot\sin(\omega t-\phi)=\{X\}\cdot\sin(\omega t-\phi)}$$

$\boxed{\{X\}}$ ominaismuoto

$\boxed{\omega}$ ominaiskulmataajuus

$\boxed{\phi}$ vaihekulma

Ominaiskulmataajuudet lasketaan **karakteristisesta yhtälöstä**

$$\boxed{\det\left([K]-\omega^2[M]\right)=0}$$

Ominaismuodot lasketaan **homogeenisesta yhtälöryhmästä**, josta ne ratkeavat vakiokerrointa vaille yksikäsitteisinä

$$\boxed{\left([K]-\omega^2[M]\right)\{X\}=\{0\}}$$

Modaalimassa ja modaalijäykkyys

$$\boxed{M_i=\{X\}_i^T[M]\{X\}_i} \qquad \boxed{K_i=\{X\}_i^T[K]\{X\}_i}$$

$$\boxed{\omega_i^2=K_i/M_i}$$

USEAN VAPAUSASTEEN SYSTEEMIN VAIMENEMATON OMINAISVÄRÄHTELY

Ominaismuodot ovat **ortogonaaliset**, kun $\omega_i \neq \omega_j$ eli

$$\{X\}_j^T [M] \{X\}_i = 0 \qquad \{X\}_j^T [K] \{X\}_i = 0$$

Modaalimatriisin pystyrivit ovat normeeratut ominaismuodot

$$[\Phi] = \left[\, \{X\}_1 \quad \{X\}_2 \quad \dots \quad \{X\}_n \,\right]$$

Modaalimassamatriisi

$$\left[\tilde{M}\right] = [\Phi]^T [M] [\Phi] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M_n \end{bmatrix}$$

Modaalijäykkyysmatriisi

$$\left[\tilde{K}\right] = [\Phi]^T [K] [\Phi] = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_n \end{bmatrix}$$

Systeemin asemat $\{x\}$ voidaan esittää ominaismuotojen yhdistelmänä

$$\{x\} = \sum_{j=1}^{n} c_j \{X\}_j \qquad c_i = \frac{1}{M_i} \{X\}_i^T [M] \{x\}$$

USEAN VAPAUSASTEEN SYSTEEMIN VAIMENEMATON OMINAISVÄRÄHTELY

Ominaisvärähtelyn yleinen **ratkaisu**

$$\{x\} = \sum_{i=1}^{n} A_i \{X\}_i \sin(\omega_i t - \phi_i)$$

$\{X\}_i$ normeerattu ominaismuoto ω_i ominaiskulmataajuus

A_i ja ϕ_i alkuehdoista saatavia vakioita

Vaihtoehtoinen **ratkaisu**

$$\{x\} = \sum_{i=1}^{n} \{X\}_i \left(B_i \sin\omega_i t + C_i \cos\omega_i t \right)$$

B_i ja C_i ovat alkuehdoista saatavia vakioita.

Alkuehdot

$$\{x(0)\} = \{x_0\} \qquad \{\dot{x}(0)\} = \{\dot{x}_0\}$$

Vakiot

$$C_i = \frac{1}{M_i} \{X\}_i^T [M] \{x_0\} \qquad B_i = \frac{1}{\omega_i M_i} \{X\}_i^T [M] \{\dot{x}_0\}$$