USEAN VAPAUSASTEEN SYSTEEMIN VAIMENEMATON PAKKOVÄRÄHTELY

NORMAALIMUOTOMENETELMÄ

Perusajatus: Valitaan koordinaatit η_i, $i = 1, 2, \dots, n$ siten, että η_i ilmaisee, millä osuudella ominaismuoto $\{X\}_i$ on mukana systeemin tilassa.

Koordinaatit η_i, $i = 1, 2, \dots, n$ ovat **pääkoordinaatit** eli niiden avulla lausutut liikeyhtälöt eivät sisällä staattista eivätkä dynaamista kytkentää.

Lähtökohtana ovat liikeyhtälöt ja alkuehdot lausuttuna mielivaltaisen koordinaattien $\{x\} = \{x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n\}$ avulla

Liikeyhtälöt $\boxed{[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\}}$

Alkuehdot $\boxed{\{x(0)\} = \{x_0\} \qquad \{\dot{x}(0)\} = \{\dot{x}_0\}}$

Ratkaistaan **ominaiskulmataajuudet** $\omega_i, i = 1, 2, \dots, n$ ja **normeeratut ortogonaaliset ominaismuodot** $\{X\}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Karakteristinen yhtälö $\boxed{\det\left([K] - \omega^2 [M]\right) = 0}$

Amplitudien yhtälöryhmä $\boxed{\left([K] - \omega_i^2 [M]\right)\{X\}_i = \{0\}}$

Muodostetaan **modaalimatriisi** $[\Phi]$, jonka pystyrivit ovat ominaismuodot

Modaalimatriisi $\boxed{[\Phi] = \left[\{X\}_1 \quad \{X\}_2 \quad \cdots \quad \{X\}_n\right]}$

Määritellään **pääkoordinaatit** $\{\eta\} = \{\eta_1 \quad \eta_2 \quad \cdots \quad \eta_n\}$ yhtälöllä

$$\boxed{\{x\} = \eta_1\{X\}_1 + \eta_2\{X\}_2 + \cdots + \eta_k\{X\}_n = [\Phi]\{\eta\}}$$

Muunnetaan liikeyhtälöt pääkoordinaatistoon

$$\boxed{[\Phi]^T[M][\Phi]\{\ddot{\eta}\}+[\Phi]^T[K][\Phi]\{\eta\}=[\Phi]^T\{F\}} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{[\tilde{M}]\{\ddot{\eta}\}+[\tilde{K}]\{\eta\}=\{\tilde{F}\}}$$

Modaalimassamatriisi $[\tilde{M}]=[\Phi]^T[M][\Phi]$ on **lävistäjämatriisi**, jonka lävistäjäalkioina ovat **modaalimassat** $M_i=\{X\}_i^T[M]\{X\}_i$.

Modaalijäykkyysmatriisi $[\tilde{K}]=[\Phi]^T[K][\Phi]$ on **lävistäjämatriisi**, jonka lävistäjäalkioina ovat **modaalijäykkyydet** $K_i=\{X\}_i^T[K]\{X\}_i$.

Modaalivoimavektori on $\{\tilde{F}\}=[\Phi]^T\{F\}$.

Liikeyhtälöt pääkoordinaatistossa ovat auki kirjoitettuna:

$$\boxed{\begin{cases} M_1\ddot{\eta}_1+K_1\eta_1=\tilde{F}_1 \\ \ldots \\ M_i\ddot{\eta}_i+K_i\eta_i=\tilde{F}_i \\ \ldots \\ M_n\ddot{\eta}_n+K_n\eta_n=\tilde{F}_n \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \ddot{\eta}_1+\omega_1^2\eta_1=\tilde{F}_1/M_1 \\ \ldots \\ \ddot{\eta}_i+\omega_i^2\eta_i=\tilde{F}_i/M_i \\ \ldots \\ \ddot{\eta}_n+\omega_n^2\eta_n=\tilde{F}_n/M_n \end{cases}}$$

Kukin tuntematon koordinaatti η_i voidaan ratkaista omasta yhtälöstään. Tyypillisen yhtälön **ratkaisu** on

$$\boxed{\ddot{\eta}_i+\omega_i^2\eta_i=\tilde{F}_i/M_i \quad \Rightarrow \quad \eta_i=\eta_{ih}+\eta_{ip}}$$

η_{ih} on **homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu** ja η_{ip} **täydellisen yhtälön yksityisratkaisu**.

$$\boxed{\eta_{ih} = D_i \sin\omega_i t + E_i \cos\omega_i t}$$

Yksityisratkaisu $\boxed{\eta_{ip}}$ löytyy esimerkiksi **Duhamelin integraalista**.

Vakiot D_i ja E_i saadaan **pääkoordinaatiston alkuehdoista**

$$\boxed{\eta_i(0) = \frac{1}{M_i}\{X\}_i^T [M]\{x(0)\} \quad ,i = 1,2,\ldots,n}$$

$$\boxed{\dot{\eta}_i(0) = \frac{1}{M_i}\{X\}_i^T [M]\{\dot{x}(0)\} \quad ,i = 1,2,\ldots,n}$$

Kun pääkoordinaatit η_i tunnetaan, voidaan palata **alkuperäisiin koordinaatteihin** kaavan $\{x\} = [\Phi]\{\eta\}$ avulla.

Harmonisen pakkovoimavektorin yksityisratkaisu

Kuormitusvektori on $\{F\} = \{F_0\}\sin\Omega t$, jossa $\{F_0\}$ on vakiovektori.
Modaalivoimavektorin $\{\tilde{F}\} = [\Phi]^T\{F_0\}\sin\Omega t$ tyypillinen komponentti on

$$\tilde{F}_i = \{X\}_i^T\{F_0\}\sin\Omega t = P_i \sin\Omega t \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_i = \{X\}_i^T\{F_0\}}$$

Koordinaattia η_i vastaava **liikeyhtälö** on

$$\boxed{\ddot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = \frac{P_i}{M_i}\sin\Omega t}$$

jonka **yksityisratkaisu** on

$$\boxed{\eta_{ip} = Y_i \sin\Omega t = \frac{P_i}{M_i}\frac{1}{\omega_i^2 - \Omega^2}\sin\Omega t = \frac{P_i}{K_i}\frac{1}{1-(\Omega/\omega_i)^2}\sin\Omega t}$$